



Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia

Projecções Cartográficas

João Catalão



Lisboa, 2010

Índice

Capítulo 1: *Introdução*

1.1 A cartografia	1
1.2 Objectivo e métodos de representação	4
1.3 Classificação das projecções cartográficas.....	7
1.3.1 O problema extrínseco	9
1.3.2 O problema intrínseco	10
2.1 Coordenadas Curvilíneas.....	13
2.2 Geometria diferencial elementar	15
2.2.1 Elemento linear e expressões angulares.....	15
2.2.2 Matriz de transformação fundamental	17
2.3 Teoria das deformações	18
2.3.1 Deformação linear	18
2.3.2 Deformação areal.....	21
2.3.3 Pares ortogonais correspondentes.....	22
2.3.4 Deformação angular.....	23
2.4 Adaptação das fórmulas ao caso da representação do elipsóide sobre o plano	25
2.4.1 Coordenadas Cartesianas.....	25
2.4.2 Coordenadas Polares	25
3.1 Definição.....	27
3.2 Equação diferencial das representações equivalentes no caso da representação do elipsóide sobre o plano	28
3.3 Projecção de Bonne.....	29
3.3.1 Interpretação geométrica da projecção de Bonne	33
4.1 Definição	35
4.2 Coordenadas isométricas	36
4.3 Expressão geral das projecções conformes.....	37
4.4 Relação entre as curvaturas geodésicas de duas linhas.....	39
4.5 Projecção de Mercator	41
4.5.1 Introdução.....	41
4.5.2 Fórmulas de transformação directa.....	42
4.5.3 Correção à corda.....	45
4.5.4 Correção a aplicar a um comprimento finito.....	47
4.5.5 Fórmulas de transformação inversa	48
4.5.6 Comprimento de um arco de loxodrómica	48
4.6 Projecção de Lambert (cónica conforme).....	49
4.6.1 Introdução.....	49
4.6.2 Fórmulas de transformação directa	49
4.6.3 Fórmulas de transformação inversa	54
4.6.4 Correção de redução á corda.....	56
4.6.5 Correção a aplicar a um comprimento finito.	57
4.7 Projecção de Gauss.....	57
4.7.1 Fórmulas de transformação directa	57
4.7.2 Fórmulas de transformação inversa	60

4.7.3 Deformação linear	61
4.7.4 Convergência de meridianos.....	62
5.1 Sistema Puissant – Bonne	63
5.2 Sistema Bessel – Bonne	65
5.3 Sistema Hayford–Gauss / Datum Lisboa	66
5.4 Sistema Hayford–Gauss militar	68
5.5 Sistema de coordenadas U.T.M.....	69
5.6 Sistema de coordenadas no Arquipélago dos Açores e da Madeira	72
5.7 Sistema Hayford–Gauss / Datum 73.....	73
5.8 Sistema PT-TM06 (Hayford–Gauss / ETRS89).....	75
Bibliografia.....	76

Capítulo 1

Introdução

1.1 A cartografia

A cartografia tem como objectivo a concepção, preparação e realização de cartas.

A definição apresentada em 1973 pela Associação Internacional de Cartografia (ICA) refere que a Cartografia: é a arte, ciência e técnica de elaborar cartas, conjuntamente com o seu estudo como documento científico e obra de arte. Neste contexto as cartas são vistas como uma inclusão de todos os tipos de mapas, plantas, modelos tridimensionais, e globos representando a Terra ou qualquer corpo Celeste a qualquer escala. Assim, uma carta é uma representação geométrica, plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou qualquer corpo celeste.

No aspecto “ciência” podemos considerar as preocupações humanas em tentar representar num plano a dificilmente concebível superfície da Terra, a que chamamos geóide; é objecto da matemática formular relações que permitam essa representação, permitindo ainda conceber um conjunto de quadrículas que vão permitir a uma pessoa indicar com facilidade a outra, o posicionamento de locais ou objectos, ou seja, um sistema de referenciação.

No aspecto “arte” podemos considerar a maneira artística como sempre foram representados os diversos aspectos da superfície terrestre. A única forma de representar

quase sem alteração a superfície da Terra, embora com todos os defeitos e alterações pertinentes à transformação não coerente de um geóide numa esfera, é a sua projecção numa esfera ou globo. No entanto, somente as representações da Terra em superfícies planas, como sejam as cartas geográficas ou topográficas, permitem um manuseamento fácil e não dependem da escala a utilizar.

A cartografia engloba todas as operações que vão desde o levantamento sobre o terreno até à impressão definitiva e difusão do documento cartográfico. Neste sentido a cartografia compreende duas etapas conceptualmente distintas. A primeira etapa, etapa científica, situa-se ao nível do conhecimento aprofundado dos elementos a cartografar e dos meios gráficos e matemáticos que permitem a transmissão eficaz da informação, abrangendo as operações de aquisição de dados e representação sobre o plano. A segunda etapa, etapa técnica, situa-se ao nível da execução material, da transformação de uma minuta cartográfica numa carta e na sua reprodução pelos meios usuais do desenho, ou de impressão.

A representação completa do terreno sobre uma carta significa uma escolha dos elementos que ocupam realmente a superfície da Terra escolha em número, dado que alguns deverão ser eliminados, e escolha em importância, dado que serão registados somente os que correspondem a certos e determinados critérios. A carta é assim um documento cuja construção é subjectiva, e submetida a normas pré-definidas de selecção e de representação. A subjectividade inerente à elaboração de uma carta, aliada ao elevado número de elementos que compõem a superfície terrestre levam a que uma carta seja sempre uma representação incompleta do terreno mesmo a mais detalhada das cartas é ainda uma reprodução simplificada da imagem do terreno.

Uma carta ou mapa, não constituem um fim em si mesmos, mas antes um meio para que o homem possa alcançar outro objectivo mais complexo, o estudo do seu meio ambiente para uma determinada finalidade. Podemos dizer que uma carta é um modelo teórico adoptado dos levantamentos topográficos e geodésicos da Terra, representada em miniatura.

A cartografia como ciência tenta representar no plano a dificilmente definível superfície da Terra, a que chamamos geóide. É objecto da cartografia, conseguir relações que permitam essa representação, permitindo ainda conceber um conjunto de quadrículas que vão possibilitar o posicionamento de locais ou objectos, ou seja, um sistema de referência.

Uma vez que a superfície da Terra é curva e a superfície dos mapas é plana, não é possível a representação da superfície num mapa sem alguma distorção. Se a área a representar é considerada pequena, então a superfície terrestre pode ser considerada como plana, e o mapa pode ser construído por uma projecção ortogonal e a localização relativa dos pontos é feita sem distorção. Com o aumento da área a representar, este modelo torna-se inadequado e é necessário empregar outras técnicas de projecção com o objectivo de minimizar as distorções. A utilização dos diferentes métodos ou processos de representação, depende de vários factores, tais como, da escala da carta, das características da região, dos meios disponíveis e do fim a que a carta se destina.

O domínio da cartografia é bastante vasto. O número de temas e assuntos possíveis, a multiplicidade de fenómenos susceptíveis de serem cartografados, a variedade de meios de expressão gráfica são tais que uma classificação metódica e lógica poderá tornar-se complexa e provavelmente inútil.

Uma classificação metódica e científica deverá agrupar tipos de cartas segundo as suas afinidades fundamentais, ou seja, o seu objecto. Neste sentido, as cartas são classificadas em duas classes principais: **cartas topográficas**, em que figuram essencialmente os resultados de observações respeitantes a posição planimétrica e altimétrica, a forma, a dimensão e a identificação de fenómenos concretos e fixos sobre a superfície terrestre; as **cartas temáticas** em que é representado, geralmente sobre uma carta topográfica, os fenómenos qualitativos e quantitativos, concretos e limitados pela escolha de um tema ou de um assunto particular.

Uma carta topográfica é uma representação exacta e detalhada da superfície terrestre, no que concerne à posição, forma, dimensão e identificação dos acidentes do terreno. Ela implica, além de um conhecimento matemático e físico correcto, um sentir do modelo do relevo, e uma apreciação correcta do valor de significância e de interesse relativo dos elementos visíveis do terreno. As cartas topográficas representam o relevo do terreno de tal forma que seja possível a sua medição na carta. Uma carta topográfica é assim um desenho, que nos permite apreciar não só as dimensões e as formas do terreno numa dada região, mas também o seu relevo.

As cartas topográficas têm uma infinidade de aplicações. Elas são necessárias no apoio a qualquer projecto de engenharia que requeira considerações sobre a forma do terreno, elevação ou gradiente e são também necessárias no fornecimento de informação geral aos estudos de geólogos, economistas, e a todos os que se dediquem a estudos sobre o desenvolvimento dos recursos naturais da superfície terrestre.

Tradicionalmente as cartas eram construídas com base nos métodos clássicos de levantamento no terreno por meio de técnicas topográficas. A topografia era a única ciência que tinha por objectivo o estudo e a descrição exacta e minuciosa da forma da superfície terrestre, apresentando os resultados sob a forma de cartas topográficas, desenhadas manualmente. Assim, a topografia apoiava-se na cartografia para representar a superfície terrestre numa carta, por outro lado a cartografia apoiava-se na topografia para aquisição de dados e elaboração das cartas.

Após a 1ª guerra mundial a cartografia tem recorrido cada vez com mais insistência a técnicas de fotografia aérea para representar a superfície terrestre. A fotografia aérea, complementada com a imagem por satélite, abriu uma nova fase na exploração da figura da Terra. Com efeito, esta técnica permite ter uma imagem global da superfície terrestre na qual é visível tudo o que caracteriza a superfície. A fotografia aérea permite num intervalo de tempo muito curto um grande volume de registos detalhados, precisos e mensuráveis, susceptíveis de um exame prolongado.

Presentemente os mapas são elaborados por técnicas fotogramétricas usando dados de fotografia aérea ou mesmo de satélite. Este tipo de cartas é desenhado recorrendo à combinação de técnicas manuais, fotográficas e automáticas. Este facto leva a que a representação da superfície terrestre escape em geral à cartografia isoladamente, recorrendo-se à geodesia, à topografia e à fotogrametria como ciências subsidiárias da cartografia.

A descrição do terreno, com a precisão e rapidez requeridas por determinados tipos de projectos, é um trabalho cuja complexidade pode ser avaliada pela simples observação da grande quantidade de objectos que constituem a paisagem e que devem ser identificados, medidos, e desenhados nas suas posições relativas, determinando-se também as altitudes e formas do terreno. Como a superfície do terreno não é matematicamente definível, por maior que seja o número de pontos recolhidos, nunca poderá ser representada exactamente, mesmo porque, a morfologia da superfície varia com as estações do ano e sofre modificações constantes devido aos agentes químicos e aos mecanismos internos e externos.

O bom senso, o conhecimento da morfologia geológica do terreno e a boa observação permitem que se consiga com poucos pontos levantados, representar com fidelidade necessária, o terreno observado com uma forma próxima, o mais possível da sua forma real.

Neste documento serão abordados os aspectos teóricos da projecção da figura da Terra no plano, a que designamos por Cartografia Matemática e são também apresentados os principais sistemas de projecção utilizados em Portugal.

1.2 Objectivo e métodos de representação

O objectivo da Cartografia Matemática consiste no estudo analítico das possíveis formas de representar a superfície da Terra numa superfície plana minimizando as distorções dessa representação.

É precisamente esta transformação da superfície da Terra numa superfície plana a operação mais difícil de conseguir. No entanto, pode-se projectar a superfície física da Terra sobre o elipsóide de referência escolhido, por meio de projectantes normais ao elipsóide em cada um dos seus pontos (método de projecção de Helmert). Assim sendo, cada um dos pontos da superfície física da Terra fica assim definido por 3 coordenadas, a latitude ϕ (ângulo entre a normal do lugar e o plano do equador) e a longitude λ (ângulo entre o meridiano do lugar e o meridiano de referência, medido no plano do equador) das respectivas projecções sobre o elipsóide, e, pela altitude ortométrica (altitude acima do geóide medida segundo a linha de força do campo gravítico terrestre nesse ponto da Terra).

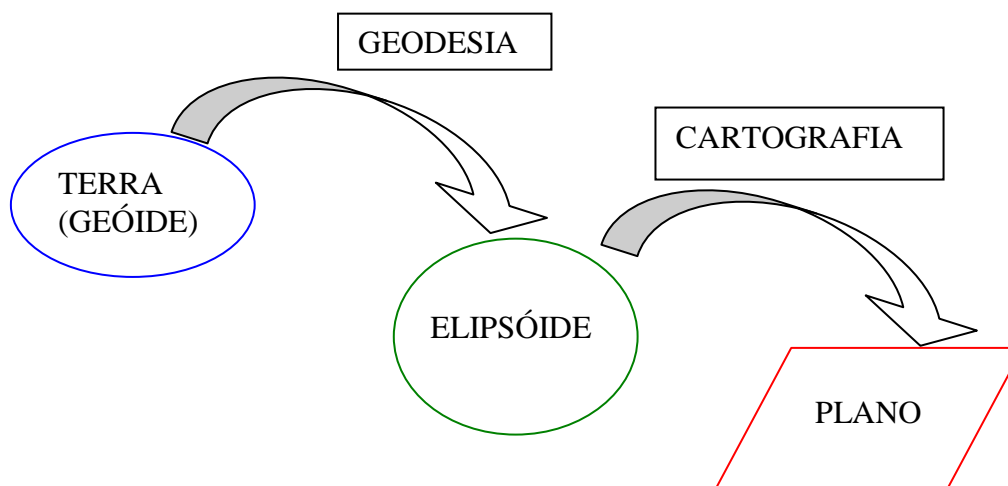


Fig. 1.1 - Esquema de representação da Terra no plano.

A projecção da superfície da Terra num plano tem como principal objectivo a representação das posições de pontos discretos na superfície original num sistema de coordenadas plana que permite o cálculo de distâncias e ângulos entre esse conjunto discreto de pontos.

O problema consiste pois em transferir os pontos da superfície terrestre para o plano, entrando pelo meio com a projecção de Helmert para passar ao elipsóide, obedecendo a uma determinada lei, geométrica ou analítica, que traduza a posição de cada um dos pontos na carta, em função da correspondente posição sobre aquela superfície. Esta lei, que relaciona as coordenadas geodésicas dos pontos sobre o elipsóide, com as correspondentes na carta, constitui o que se chama um sistema de projecção, ou um sistema de representação.

O problema básico das projecções consiste na representação de uma superfície curva no plano. A figura da Terra é usualmente representada por um elipsóide de revolução, ou uma esfera, superfície sobre a qual são representados todos os elementos da superfície física da Terra. A fim de minimizar as deformações que lhe estão associadas, deve o cartógrafo escolher qual a característica que deve aparecer correctamente, em prejuízo das outras, ou contemporizar com todas elas, não aparecendo nenhuma correcta.

Os numerosos sistemas existentes de representação cartográfica, têm pois cada um as suas vantagens e inconvenientes, sendo o critério de escolha de cada um, função dos seguintes parâmetros: extensão da região a representar, configuração da região a representar, latitude média da região, fim a que a carta se destina, etc..

A representação plana é obtida por uma transformação analítica, isto é, uma correspondência pontual biunívoca entre o elipsóide e o plano, ou seja, a todo o ponto **P** de coordenadas geográficas (ϕ, λ) do elipsóide corresponde um ponto imagem **p** do plano, de coordenadas (M, P) e vice-versa.

As fórmulas gerais de uma projecção serão assim:

$$M = f(\phi, \lambda)$$

$$P = g(\phi, \lambda)$$

E as inversas são dados de uma forma genérica por:

$$\phi = F(M, P)$$

$$\lambda = G(M, P)$$

Em conclusão, pode-se dizer que para simplificação do sistema de leitura (passa-se a ter rectas em vez de curvas) usa-se um sistema de eixos centrado num ponto escolhido, a partir do qual se traça a quadrícula.

Existem três critérios cartográficos para a caracterização das projecções:

- a) **Equidistância** – representação correcta das distâncias
- b) **Conformidade** – representação correcta das formas
- c) **Equivalência** – representação correcta das áreas

Estes três critérios são básicos e mutuamente exclusivos, sendo do ponto de vista cartográfico, irrelevantes quaisquer outras características de uma dada projecção. Deverá ser notado que não existem representações ideais, unicamente a melhor representação para um determinado propósito.

Os métodos de projecção ou representação podem ser classificados como:

- a) projecção directa do elipsóide na superfície de projecção
- b) dupla projecção envolvendo uma transformação do elipsóide numa superfície esférica e posterior representação da superfície esférica na superfície de projecção.

Existem, assim, dois tipos de superfícies datum – elipsóide e esfera. Existem 3 tipos de superfícies de projecção – plano, cone e cilindro em que as duas últimas são convertidas num plano (fig. 1.2).

A transformação da superfície datum na superfície projecção pode ser de natureza geométrica, semi-geométrica ou matemática. Muito poucas projecções são projecções verdadeiramente perspectivas em sentido geométrico.

É conveniente definir uma projecção cartográfica com um arranjo sistemático de linhas que se intersectam no plano, que representam e têm uma correspondência de um para um com os meridianos e paralelos da superfície datum. O arranjo segue algum princípio consistente de modo a verificar determinadas condições pré-definidas.

Cada conjunto de novas condições resulta numa projecção cartográfica diferente e, conseqüentemente, existem um número ilimitado de projecções cartográficas. Contudo, na prática, os três enunciados critérios cartográficos são aplicados com um número limitado de outras condições resultando num número de cerca de cem projecções criadas para fins específicos (veja-se a lista de projecções de Maling, 1965).

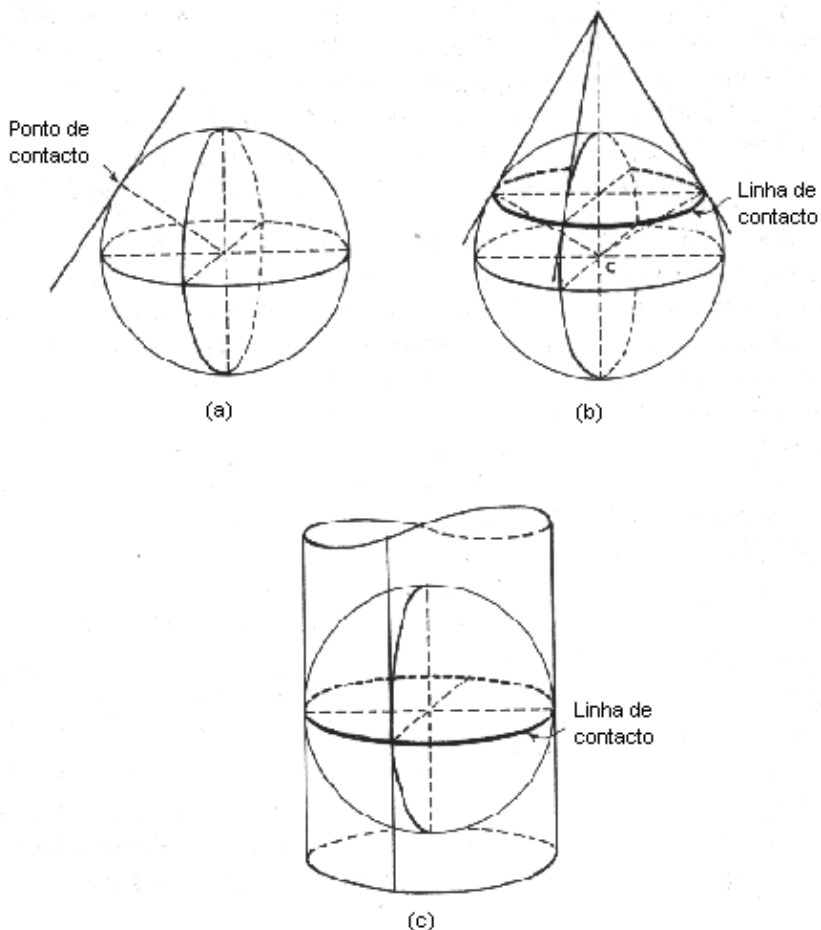


Fig.1.2 – Classificação das projecções cartográficas quanto à natureza: a) plana, b) cónica e c) cilíndrica.

1.3 Classificação das projecções cartográficas

A classificação de projecções cartográficas deverá seguir um “standard” de modo que qualquer projecção (não convencional) possa ser descrita por um conjunto de critérios e inversamente um conjunto de critérios definirá uma qualquer projecção. Assim, um esquema de classificação deverá seguir um número de critérios subdivididos em classes e variedades conforme sugerido por Gonssinsky (1951).

As classes podem ser consideradas de diferentes pontos de vista, sendo estes não mutuamente exclusivos. As **variedades** são as subdivisões de cada **classe** e são mutuamente exclusivos. Para facilitar o processo de construção do esquema de classificação das projecções cartográficas composta por classes e variedades deverão ser consideradas determinados factores específicos:

- a) O objecto projectado ou superfície datum
- b) A superfície projecção na qual a superfície datum é projectada
- c) A projecção ou representação “de per si”

A superfície de projecção é considerada como o problema externo e o processo de projecção ou representação como o problema intrínseco.

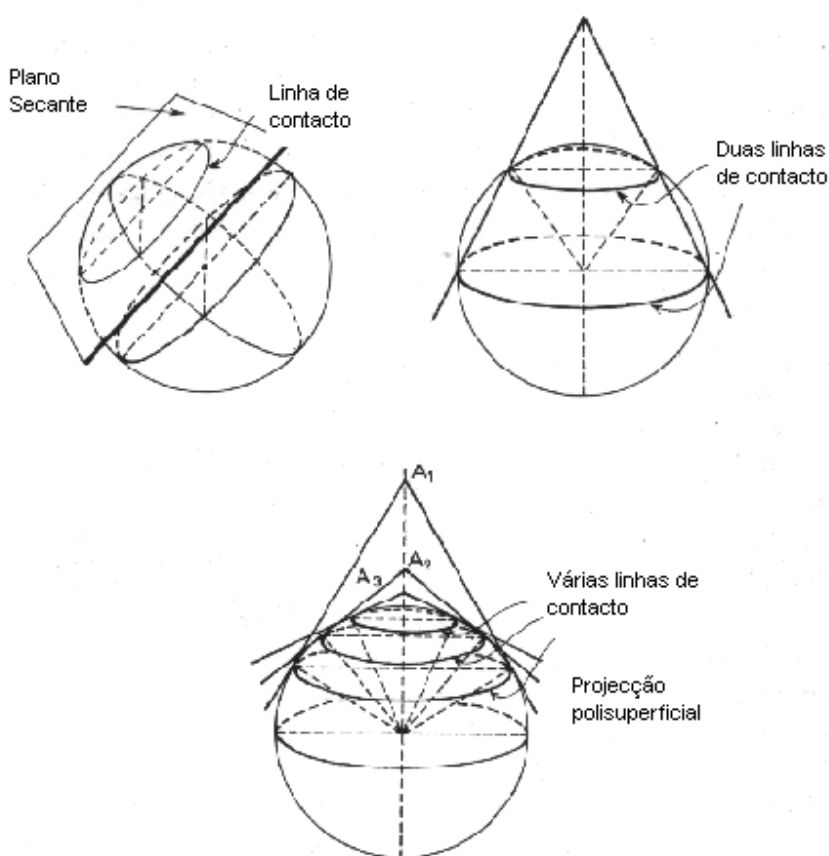


Fig.1.3 – Classificação das projecções cartográficas quanto à coincidência: a) tangente, b) secante e c) polisuperficial.

1.3.1 O problema extrínseco

Este problema envolve a consideração das propriedades da superfície relativamente à superfície datum dando origem a três classes:

Natureza : natureza da superfície projecção definida como a figura geométrica

Coincidência : contacto da superfície projecção com a superfície datum

Posição : alinhamento da superfície projecção em relação com a superfície datum.

Quanto à **natureza** (fig. 1.2), as projecções podem ainda ser dividida em três variedades, representando, cada uma, as superfícies básicas de projecção, nomeadamente o plano, o cone e o cilindro. A mais simples destas superfícies de projecção é o plano, que quando tangente à superfície datum terá um único ponto de contacto a que corresponde o centro da área da área de mínima distorção. O cone e o cilindro, que são ambos desenrolados num plano e são introduzidos com o objectivo de aumentar a região de contacto e consequentemente aumentarem a região de mínima distorção.

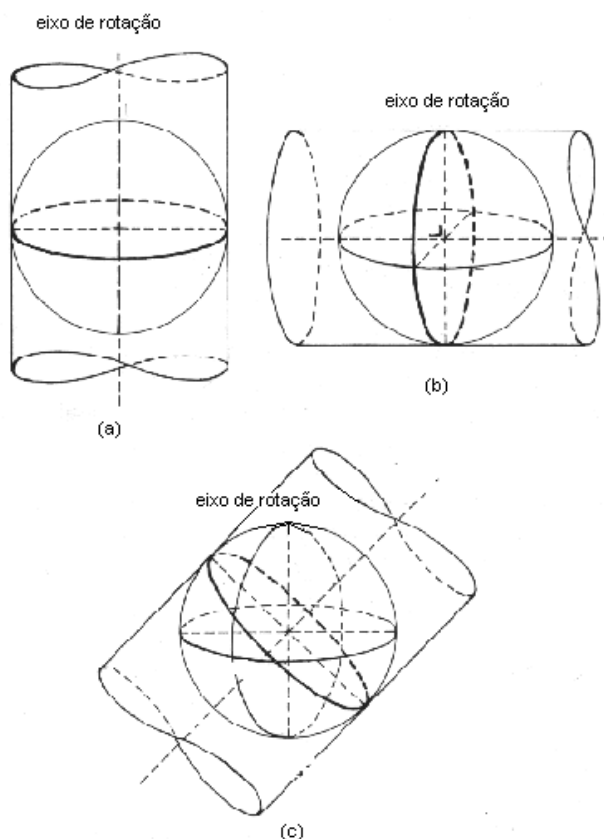


Fig.1.4 – Classificação das projecções cartográficas quanto à posição: a) normal, b) transversa e c) oblíqua.

A classe **coincidência** (fig. 1.3) pode ser dividida em três variedades representando os três tipos de coincidência entre a superfície datum e a superfície projecção, nomeadamente tangente, secante e polisuperficial. É facilmente verificado que a tangência entre a superfície datum e a superfície projecção resulta num ponto ou numa linha de contacto, a primeira no caso da superfície projecção ser um plano e a segunda no caso em que a superfície é um cilindro ou um cone. Para aumentar a área de contacto entre as duas superfícies, e consequentemente a área de mínima distorção, é introduzido o modo secante, resultando numa linha de contacto no caso em que a superfície é o plano e em duas linhas de contacto no caso em que a superfície é o cilindro ou o cone. Para uma ainda maior área de contacto é introduzido o múltiplo contacto designado por polisuperficial. Neste caso uma série de planos sucessivos produzirá uma projecção poliédrica (plano sucessivos), uma sequência de cones produzirá uma projecção policónica e uma série de cilindros produzirá uma projecção policilíndrica.

Quanto à **posição** (fig. 1.4) as projecções são subdivididas em três variedades representando as três posições básicas ou alinhamentos da superfície projecção relativamente à superfície datum, nomeadamente, normal, transversa e oblíqua. Se o eixo de simetria da superfície de projecção coincide com o eixo de rotação do elipsóide designamos a projecção de normal. Se o eixo de simetria é perpendicular ao eixo de rotação então nesse caso designamos por transversa e todas as outras atitudes são designadas por oblíquas.

1.3.2 O problema intrínseco

Este problema envolve a consideração da projecção do ponto de vista das suas propriedades cartográficas e modo de construção e é dividido em 3 classes: equidistantes, conformes e equivalentes.

A **Equidistância** significa que existe uma correcta representação da distância entre dois pontos na superfície datum e na superfície projecção, de modo que a escala é mantida ao longo de linhas que liguem quaisquer dois pontos. Esta característica é naturalmente limitada a um número reduzido de pontos e não é de forma alguma uma característica geral das projecções.

A **Conformidade** representa a manutenção da forma dos elementos, e consequentemente a manutenção dos ângulos e direcções. Esta propriedade é limitada a pontos muito próximos e não é certamente a figuras geométricas de grandes dimensões.

A **Equivalência** significa manutenção das áreas dos elementos mas com a deformação da sua forma e dos ângulos e direcções.

O tipo de construção da carta pode ser dividido em 3 variedades mutuamente exclusivas representando os três principais modos de construção de uma projecção. As três variedades são: geométrica, semi-geométrica e matemática.

As projecções geométricas ou semi-geométricas resultam de uma representação geométrica ou perspectiva pura ou por meio de um processo parcialmente projectivo. Neste caso enquadram-se as projecções gonómica e estereográfica. Nas projecções do tipo matemático não existe qualquer relação do tipo projectivo ou geométrico sendo a representação obtida por um processo matemático.

Capítulo 2

Representação de uma superfície sobre outra

2.1 Coordenadas Curvilíneas

Seja S uma superfície curva qualquer onde se adoptou um sistema de curvas de referência ou curvas paramétricas. Se estas curvas forem designadas por u e v respectivamente, então um qualquer ponto da superfície pode ser dado em coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z em função das coordenadas u e v (fig. 2.1).

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

Por uma questão de conveniência esta superfície é designada por superfície de referência. A mesma relação pode ser escrita para uma segunda superfície designada por projecção ou superfície imagem (fig. 2.2).

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = p'_1(u_1, v_1) \\ y_1 = p'_2(u_1, v_1) \\ z_1 = p'_3(u_1, v_1) \end{cases} \quad (2.2)$$

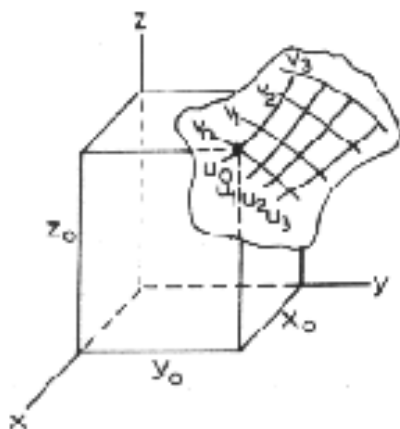


Fig. 2.1 - Superfície de referência

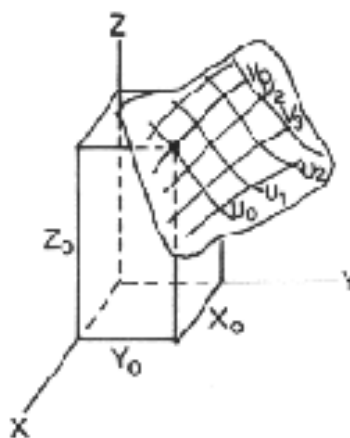


Fig. 2.2 - Superfície projecção

As curvas paramétricas na primeira superfície estão relacionadas com um sistema arbitrário de curvas da segunda superfície se existir uma relação matemática entre os parâmetros u, v e u_1, v_1 :

$$\begin{cases} u_1 = q_1(u, v) \\ v_1 = q_2(u, v) \end{cases} \quad (2.3)$$

Se o objectivo é a representação da superfície da Terra numa esfera, ou num plano, é óbvio que deverão ser satisfeitas pelo menos duas condições:

- a) A projecção ou imagem deve ser única,
- b) A projecção deve ser reversível.

Isto significa que um ponto da superfície de referência deverá corresponder um e um só ponto na superfície imagem. O inverso deverá também ser verificado. Matematicamente esta condição pode ser expressa pela condição de que os parâmetros u e v devam ser resolúveis a partir da equação 2.3, exprimindo directamente os parâmetros u e v em função de u_1 e v_1 .

$$\begin{cases} u = \bar{q}_1(u_1, v_1) \\ v = \bar{q}_2(u_1, v_1) \end{cases} \quad (2.4)$$

Sem mais restrições, as curvas paramétricas u e v não correspondem, em regra, ao sistema u_1, v_1 , representando um outro sistema arbitrário de referência. A relação entre as coordenadas u e v da superfície S e as coordenadas cartesianas da superfície S_1 pode ser obtida relacionando a equação 2.1, 2.2, 2.3 obtendo-se:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{p}_1(u, v) \\ y_1 = \bar{p}_2(u, v) \\ z_1 = \bar{p}_3(u, v) \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 Geometria diferencial elementar

2.2.1 Elemento linear e expressões angulares

Representando por ds o elemento linear ou comprimento infinitesimal de uma parte de uma curva numa qualquer superfície, o quadrado desse elemento linear é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.6)$$

e a relação entre estes deslocamentos dx , dy e dz e os deslocamentos du e dv é dada por:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{aligned} \quad (2.7)$$

Então o elemento linear em coordenadas curvilíneas é dado pela primeira forma fundamental:

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \quad (2.8)$$

Em que

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os elementos E , F e G são designados **primeiros coeficientes superficiais de Gauss**. As quantidades \sqrt{E} e \sqrt{G} actuam como unidade de medida ao longo das curvas u e v na superfície. Na Fig. 2.3 é apresentado o paralelogramo diferencial num ponto P de uma curva qualquer.

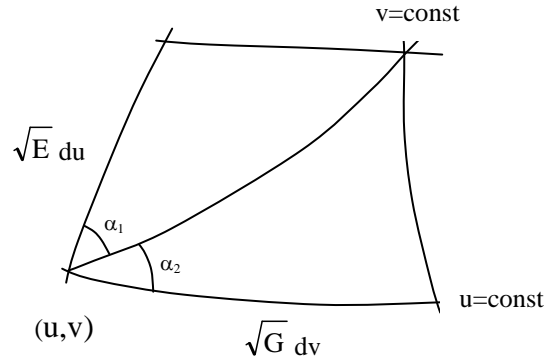


Fig. 2.3 - Paralelogramo diferencial num ponto P de uma curva qualquer.

Consideremos $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta$ em que θ é o ângulo da intersecção entre as curvas u e v no ponto P , ou seja o ângulo da intersecção das duas tangentes às curvas no ponto P . O paralelogramo pode ser considerado como plano, dada a sua área infinitamente pequena, de modo que aplicando a regra do coseno se obtém:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 + 2 \sqrt{EG} du dv \cos \theta \quad (2.10)$$

comparando esta expressão com a expressão do elemento linear (eq. 2.8) verificamos que:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (2.11)$$

Para os ângulos α_1 e α_2 obtêm-se as seguintes expressões:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv \cos \theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} \right) \quad (2.12)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{G}du + \sqrt{E}dv \cos \theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(G \frac{dv}{ds} + F \frac{du}{ds} \right) \quad (2.13)$$

Para a função seno obtêm-se as seguintes expressões:

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \quad (2.14)$$

e

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{G} \sin \theta \frac{dv}{ds} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} \quad (2.15)$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{E} \sin \theta \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}} \frac{du}{ds} \quad (2.16)$$

O ângulo α_1 é designado por azimute de ds . A área elementar do paralelogramo será dada por:

$$A = \sqrt{EG} \sin \theta \, du \, dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (2.17)$$

(produto externo de dois vectores: $a \times b = a \cdot b \cdot \sin \alpha$)

2.2.2 Matriz de transformação fundamental

Considerando duas superfícies S e S_1 , fig. 2.1 e 2.2, se sobre cada uma delas, tivermos um sistema de coordenadas curvilíneas (u, v) e (u_1, v_1) , obtemos os elementos lineares ds e ds_1 dados por :

$$ds^2 = E \, du^2 + 2 F \, du \, dv + G \, dv^2 \quad (2.18)$$

e

$$ds_1^2 = E_1 \, du_1^2 + 2 F_1 \, du_1 \, dv_1 + G_1 \, dv_1^2 \quad (2.19)$$

Estabelecendo uma correspondência entre os pontos das duas superfícies poder-se-à escrever a equação (2.3):

$$\begin{cases} u_1 = q_1(u, v) \\ v_1 = q_2(u, v) \end{cases} \quad (2.20)$$

e o elemento linear ds_1 em termos das coordenadas u e v será dado por:

$$ds_1^2 = e_1 \, du^2 + 2 f_1 \, du \, dv + g_1 \, dv^2 \quad (2.21)$$

em que

$$e_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial u} \right)^2$$

$$f_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial u} \frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial u} \frac{\partial z_1}{\partial v} \quad (2.22)$$

$$g_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial v} \right)^2$$

Diferenciando a equação 2.5, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{cases} \quad (2.23)$$

Similarmente para as derivadas de y_1 e z_1 em ordem a u e v . Após o cálculo destas derivadas estabelece-se a relação entre os coeficientes e_1, f_1, g_1 e os coeficientes E_1, F_1, G_1 através da seguinte relação matricial:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 & 2 \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial u} & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} & \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 & 2 \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial v_1}{\partial v} & \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

esta matriz é designada por *matriz fundamental da transformação*.

O discriminante $e_1 g_1 - f_1^2$ pode ser deduzido das expressões anteriores e pode ser expresso como o produto de dois determinantes:

$$e_1 g_1 - f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \Delta \quad (2.25)$$

em que o segundo determinante (designado abreviadamente por Δ no seguimento da exposição) é o determinante do Jacobeano da transformação de u e v em u_1 e v_1 . Com as funções descritas desta forma pode garantir-se que a cada par (u, v) corresponde um ponto sobre a superfície S e outro sobre a superfície S_1 , dado que este determinante é sempre diferente de zero.

2.3 Teoria das deformações

2.3.1 Deformação linear

Chama-se *módulo da deformação linear* ou *módulo linear*, à razão dada por:

$$k = \frac{ds_1}{ds} = \frac{(E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2)^{1/2}}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{1/2}} \quad (2.26)$$

Tendo em atenção a equação 2.21, verificamos que a razão anterior pode ser determinada por :

$$k^2 = e_1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f_1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + g_1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \quad (2.27)$$

Atendendo à expressão do seno e coseno do azimute de uma linha sobre a superfície (eq. 2.12 e 2.15) considerando que se está perante um sistema de coordenadas ortogonal (F=0) então a expressão anterior pode ser escrita como:

$$k^2 = e \cos^2 \alpha + 2f \sin \alpha \cos \alpha + g \sin^2 \alpha \quad (2.28)$$

sendo:

$$e = \frac{e_1}{E} \quad f = \frac{f_1}{\sqrt{EG}} \quad g = \frac{g_1}{G} \quad (2.29)$$

Considerando uma qualquer linha s sobre a superfície S e marcando sobre a tangente a esta linha dois pontos A e B a uma distância r dada como o inverso da deformação linear, então ao lugar geométrico dos pontos obtidos desta forma, para qualquer α , chama-se *indicatriz da deformação*. Verifica-se que a indicatriz da deformação é uma elipse. A equação em coordenadas polares da indicatriz é:

$$k^2 = \frac{1}{r^2} = e \cos^2 \alpha + 2f \sin \alpha \cos \alpha + g \sin^2 \alpha \quad (2.30)$$

Pelos conhecimentos de geometria analítica, facilmente se verifica que a equação anterior se trata da equação geral de uma cónica com centro. Para se confirmar que esta indicatriz é uma elipse, vamos analisar minuciosamente que tipo de cónica se trata. Para tal determinamos o sinal do discriminante da equação 2.30.

$$eg - f^2 = \frac{1}{EG} (e_1 g_1 - f_1^2) = \frac{E_1 G_1}{EG} \Delta^2 \quad (2.31)$$

que é sempre maior que zero. Portanto, como o discriminante $f^2 - eg$ é sempre inferior a zero, verifica-se analiticamente que se trata de uma elipse. Se designarmos por k_1 e k_2 respectivamente as deformações máxima e mínima, é evidente que estas serão os inversos dos semi-eixos menores da elipse indicatriz. As direcções principais, obtêm-se anulando a derivada em ordem a α do quadrado da deformação linear. Isto é :

$$\frac{dk^2}{d\alpha} = 0 \quad (2.32)$$

como

$$\frac{dk^2}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} (e \cos^2 \alpha + 2f \sin \alpha \cos \alpha + g \sin^2 \alpha) \quad (2.33)$$

então as direcções de deformação linear máxima e mínima são dadas pela expressão:

$$\sin 2\alpha (g - e) + 2f \cos 2\alpha = 0 \quad (2.34)$$

ou seja:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2f}{e - g} \quad (2.35)$$

Se substituirmos na equação (2.28) a expressão anterior, obtemos os valores k_1 e k_2 , deformação máxima e mínima respectivamente:

$$k_1^2 = \frac{1}{2} \left[(e + g) + \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2} \right] \quad (2.39)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2} \left[(e + g) - \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2} \right] \quad (2.40)$$

Analisando as duas igualdades anteriores rapidamente se verifica que :

$$k_1^2 + k_2^2 = e + g \quad (2.41)$$

A indicatriz da deformação, $1/k^2$, é também designada por **elipse de Tissot**.

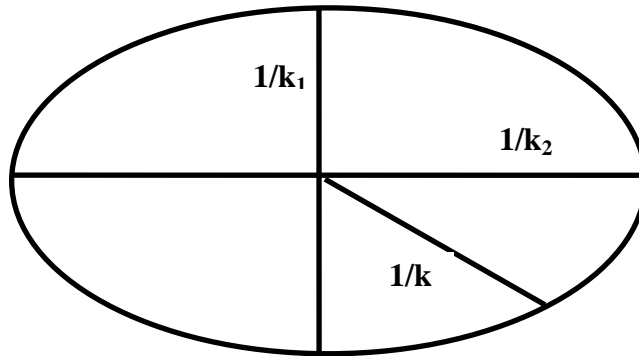


Fig. 2.4 – Indicatriz de deformação ou indicatriz de Tissot.

Portanto, a elipse de Tissot é uma elipse cujos semi-eixos são os inversos das deformações lineares máxima e mínima, k_1 e k_2 . Um raio genérico da elipse, de qualquer direcção, representa o inverso da de formação linear nessa direcção.

2.3.2 Deformação areal

Considerando as duas superfícies S e S_1 e o sistema de coordenadas ortogonais u,v , em S , então os respectivos elementos lineares são dados por :

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \quad (2.42)$$

$$ds_1^2 = e_1 du^2 + 2f_1 du dv + g_1 dv^2 \quad (2.43)$$

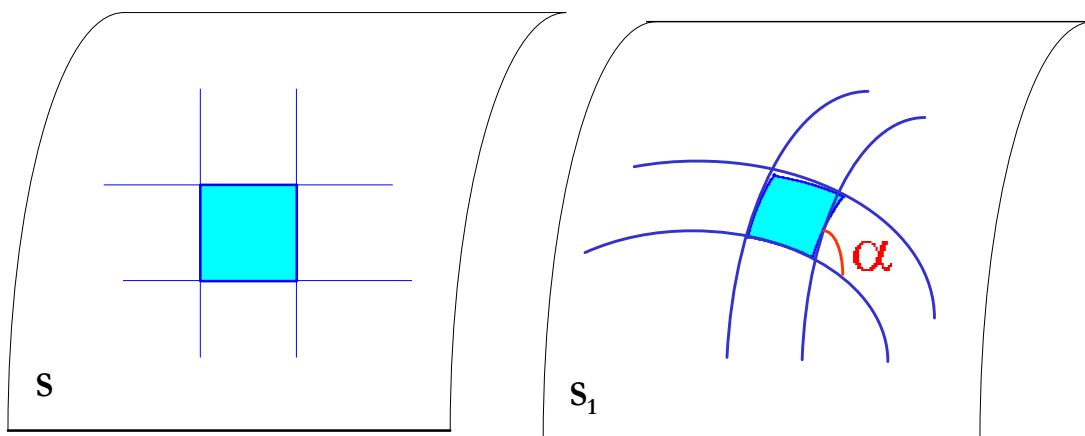


Fig. 2.5 – Elemento de área em S e sua representação em S_1 .

As áreas elementares correspondentes às superfícies são :

$$dA = \sqrt{EG} du dv \quad (2.44)$$

$$dA_1 = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2} du dv \quad (2.45)$$

À razão entre o valor das duas áreas chama-se **módulo areal** :

$$m = \frac{dA_1}{dA} \quad (2.46)$$

atendendo às expressões anteriores:

$$m = \frac{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}{\sqrt{EG}} = \sqrt{eg - f^2} \quad (2.47)$$

Da definição dos coeficientes e_1, g_1, f_1 obtém-se :

$$m = \sqrt{\frac{E_1 G_1}{EG}} \Delta \quad (2.48)$$

Sendo a deformação máxima e mínima dadas pelas equações 2.39 e 2.40 facilmente verificamos que:

$$m = k_1 \cdot k_2 \quad (2.49)$$

Ou seja, o módulo de deformação areal é igual ao produto da deformação linear máxima pela deformação linear mínima. Esta equação pode ser verificada por substituição das expressões de k_1 e k_2 de terminando-se que $m = \sqrt{eg - f^2}$.

2.3.3 Pares ortogonais correspondentes

Pretende-se agora demonstrar que para cada ponto de S existe um par de elementos ortogonais ao qual corresponde também um par de elementos ortogonais em S_1 .

Partindo dos elementos lineares:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \quad (2.50)$$

$$ds_1^2 = E_1 du_1^2 + G_1 dv_1^2 \quad (2.51)$$

E atendendo a que (ver 2.15 e 2.12):

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \quad (2.52)$$

Então :

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} \frac{dv_1}{du_1} \quad (2.53)$$

em que β é o ângulo correspondente em S_1 .

Dividindo ambos os termos de dv_1/du_1 por du e desenvolvendo:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} \frac{\frac{\partial v_1}{\partial u} + \frac{\partial v_1}{\partial v} \frac{dv}{du}}{\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{dv}{du}} \quad (2.54)$$

substituindo o valor de dv/du , da equação 2.53, obtém-se, em S :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} \frac{\partial v_1}{\partial u} + \frac{\partial v_1}{\partial v} \sqrt{\frac{E}{G}} \operatorname{tg}\alpha}{\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial v} \sqrt{\frac{E}{G}} \operatorname{tg}\alpha} \quad (2.55)$$

Assim, se tivermos um elemento ds de azimute $\alpha + \pi/2$, o seu correspondente ds_1' em S_1 terá um azimute β_1 :

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} \frac{\partial v_1}{\partial u} - \frac{\partial v_1}{\partial v} \sqrt{\frac{E}{G}} \cot g\alpha}{\frac{\partial u_1}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \sqrt{\frac{E}{G}} \cot g\alpha} \quad (2.56)$$

(porque $\operatorname{tg}(\alpha + \pi/2) = -\cot g(\alpha)$)

Então, o problema consiste em determinar α de modo a que $\beta_1 = \beta + \pi/2$, ou seja :

$$\operatorname{tg}\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\beta = -1 \quad (2.57)$$

Considerando as definições de e_1, f_1, g_1 e e, f, g , chegamos a :

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2f}{e - g} \quad (2.58)$$

ou seja, as direcções procuradas coincidem com as direcções principais de deformação definidas por (2.35).

Considerando sobre S as linhas coordenadas (u,v) tangentes em cada ponto às direcções principais de deformação e sobre S_1 as correspondentes a estas, que pelo resultado anterior é sabido serem também ortogonais, então o módulo de deformação linear é dado por:

$$k^2 = e \cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha \quad (2.59)$$

Neste caso para o azimute 0° e azimute 90° , obtém-se $k_2^2 = e$ e $k_1^2 = g$, e consequentemente:

$$k^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha \quad (2.60)$$

Sendo k_2 o módulo principal da direcção da linha origem da contagem dos azimutes.

2.3.4 Deformação angular

Definindo sobre S um sistema de coordenadas ortogonais (u,v) e sobre S_1 o correspondente par ortogonal (u_1, v_1) , o elemento linear em cada uma das superfícies é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + G dv^2 \\ ds_1^2 &= e_1 du_1^2 + g_1 dv_1^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Chama-se **deformação angular** δ , à diferença entre os ângulos α e β (ângulos que os elementos lineares, ds e ds_1 , fazem com as linhas $v = \text{constante}$). Atendendo a que :

$$\text{tg}\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} \quad (2.62)$$

e

$$\text{tg}\beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}} \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}} \sqrt{\frac{E}{G}} \text{tg}\alpha = \sqrt{\frac{g}{e}} \text{tg}\alpha = \frac{k_1}{k_2} \text{tg}\alpha \quad (2.63)$$

Sendo $\delta = \beta - \alpha$, então :

$$\text{tg}\delta = \frac{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}\beta \text{tg}\alpha} = \frac{\text{tg}\alpha \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right)}{1 + \frac{k_1}{k_2} \text{tg}^2\alpha} \quad (2.64)$$

$$\text{tg}\delta = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \frac{\text{tg}\alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \text{tg}^2\alpha} \quad (2.65)$$

Como seria esperado, para $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/2$ a deformação angular é nula ($\text{tg}\delta = 0$). O azimute para o qual a deformação angular é máxima é designado por α_m . Este valor é obtido anulando a equação da derivada da deformação angular em ordem a α , ou seja:

$$\frac{d}{d\alpha}(\text{tg}\delta) = 0 \quad (2.66)$$

obtendo-se

$$\text{tg}\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (2.67)$$

Substituindo este valor na expressão da deformação angular obtém-se a deformação angular máxima

$$\text{tg}\delta_m = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right) \quad (2.68)$$

2.4 Adaptação das fórmulas anteriores ao caso da representação do elipsóide sobre o plano

Abordar-se-á de seguida a representação da superfície S elipsóidica sobre a superfície S_1 plana. Normalmente, consideram-se a latitude e longitude (ϕ, λ) as coordenadas sobre S . Sobre S_1 utilizam-se coordenadas cartesianas (x, y) ou coordenadas polares (R, θ) . Seguidamente analisar-se-ão estes dois tipos de coordenadas sobre S_1 .

2.4.1 Coordenadas Cartesianas

Considerando $v = \lambda$, devido à contagem dos azimutes a partir das linhas $v = c.^{te}$, de acordo com as fórmulas anteriormente apresentadas, as notações usadas habitualmente são :

<u>Elipsóide</u> :	<u>Plano</u> :
$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$	$ds_1^2 = dx^2 + dy^2$
$v = \lambda$	$v_1 = y$
$u = \phi$	$u_1 = x$
$E = \rho^2$	$E_1 = 1$
$G = r^2$	$G_1 = 1$
$F = 0$	$F_1 = 0$

2.4.2 Coordenadas Polares

Neste caso, as notações habituais são :

<u>Elipsóide</u> :	<u>Plano</u> :
$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$	$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2$
$v = \lambda$	$v_1 = \theta$
$u = \phi$	$u_1 = R$
$E = \rho^2$	$E_1 = 1$
$G = r^2$	$G_1 = R^2$
$F = 0$	$F_1 = 0$

Capítulo 3

Representações Equivalentes

3.1 Definição

Uma representação diz-se *equivalente* se o módulo areal tiver um valor constante em todos os pontos. Teremos então a seguinte equação diferencial para as representações equivalentes.

$$\sqrt{\frac{E_1 G_1}{EG}} \Delta = m = \text{cte.} \quad (3.1)$$

Notar-se-á que verificando-se a relação $dA_1 = m dA$ para áreas elementares, o mesmo sucederá para áreas finitas. Seguidamente provaremos que não existem em geral representações simultaneamente conformes e equivalentes.

Para uma representação ser equivalente tem-se que:

$$k_1 k_2 = m = \text{cte.} \quad (3.2)$$

e para ser conforme ter-se-ia em cada ponto

$$k_1 = k_2 \quad (3.3)$$

Se o módulo da deformação máxima e mínima são iguais e se designar esse valor por k , então:

$$k \cdot k = k^2 = m \quad (3.4)$$

Logo concluí-se que $k = \text{cte}$ em todos os pontos da superfície, o que sabemos não ser geralmente possível.

3.2 Equação diferencial das representações equivalentes no caso da representação do elipsóide sobre o plano

Considerando sobre o elipsóide as coordenadas curvilíneas ϕ e λ , sendo $u = \phi$ e $v = \lambda$ então os coeficientes superficiais de Gauss são $E = \rho^2$ e $G = r^2$, em que ρ é o raio principal de curvatura na direcção do meridiano e r é o raio do paralelo num determinado ponto P sobre o elipsóide. Então o elemento linear é dado por:

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (3.5)$$

e sobre o plano, o elemento linear em coordenadas cartesianas x e y (em que $u_1 = x$; $v_1 = y$) é dado por:

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.6)$$

Fazendo as respectivas substituições na equação 3.1 e não esquecendo que Δ é o determinante em função de u_1 e v_1 obtem-se:

$$m = \sqrt{\frac{1}{\rho^2 r^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix}} \quad (3.7)$$

$$m \rho r = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Tomando agora sobre o plano as coordenadas polares R e θ , em que $u_1 = R$ e $v_1 = \theta$, o elemento linear é dado por:

$$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 \quad (3.9)$$

Obtém-se a expressão geral das representações equivalentes em coordenadas polares:

$$m \rho r = R \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial \phi} & \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial R}{\partial \lambda} & \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

As expressões 3.8 e 3.10 são as expressões gerais das representações equivalentes entre o elipsóide, com um sistema de coordenadas ortogonal (ϕ, λ) , e o plano com um sistema de coordenadas cartesiano (x,y) e polar (R, θ) .

3.3 Projecção de Bonne

A projecção de Bonne é uma projecção cónica, equivalente, normal com linha de contacto tangente ao paralelo de referência.

A primeira condição imposta nesta projecção é que os paralelos sejam representados por arcos de circunferência concêntricos. Neste caso convirá adoptar coordenadas polares sobre o plano e fazer com que R seja função exclusiva da latitude, ou seja:

$$R = R(\phi) \tag{3.11}$$

Impondo esta condição a equação geral das projecções equivalentes (eq. 3.10) ficará:

$$m \rho r = R \left| \frac{dR}{d\phi} \right| \left| \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} \right| \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \pm \frac{m \rho r}{R \left| \frac{dR}{d\phi} \right|} \tag{3.13}$$

Pela imposição feita anteriormente as formulas de transformação ficam:

$$R = R(\phi) \tag{3.14}$$

$$\theta = \pm \frac{m \rho r}{R \left| \frac{dR}{d\phi} \right|} \lambda + f(\phi)$$

sendo $f(\phi)$ uma função arbitrária da latitude. Considerando desde já que $f(\phi)=0$, resulta que para $\lambda=0$ o valor de $\theta =0$ e portanto o meridiano origem das longitudes que tomaremos como o meridiano central, será representado pelo eixo polar, obtendo-se assim as seguintes formulas:

$$R = R(\phi) \tag{3.15}$$

$$\theta = \pm \frac{m \rho r}{R \left| \frac{dR}{d\phi} \right|} \lambda$$

Temos assim 2 graus de liberdade representados pela função arbitrária $R(\phi)$ e pela constante m .

Relembrando os elementos lineares sobre o elipsóide e sobre o plano:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \\ ds_1^2 &= dR^2 + R^2 d\theta^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

e introduzindo a quantidade:

$$F(\phi) = \frac{\rho r}{R \left| \frac{dR}{d\phi} \right|}$$

na equação 3.15, obtemos:

$$\begin{aligned} R &= R(\phi) \\ \theta &= \pm m \lambda F(\phi) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para calcular ds_1^2 é necessário calcular dR e $d\theta$

$$dR = \frac{dR}{d\phi} d\phi \quad (3.18)$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} d\lambda = m \lambda \frac{dF}{d\phi} d\phi + m F(\phi) d\lambda = m \left[\lambda \frac{dF}{d\phi} d\phi + F(\phi) d\lambda \right] \quad (3.19)$$

O elemento ds_1^2 será então dado por:

$$ds_1^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 d\phi^2 + R^2 m^2 \left[\lambda \frac{dF}{d\phi} d\phi + F(\phi) d\lambda \right]^2 \quad (3.20)$$

O módulo linear sobre o meridiano central ($\lambda=0$) e na direcção do meridiano central ($d\lambda=0$) será:

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\left| \frac{dR}{d\phi} \right| d\phi}{\rho d\phi} = \frac{\left| \frac{dR}{d\phi} \right|}{\rho} = \frac{|R'|}{\rho} \quad (3.21)$$

e impondo que este módulo seja o mesmo em todos os pontos do meridiano central, resulta que:

$$\frac{|R'|}{\rho} = k \Leftrightarrow |R'| = k\rho \Leftrightarrow R = \pm k \int \rho d\phi + c \quad (3.22)$$

sendo o sinal + correspondente ao caso de R crescer com ϕ e o sinal - ao caso de R decrescer com ϕ . Se representarmos por ϕ_0 a latitude do paralelo central e por R_0 o raio do arco de circunferência correspondente:

$$R_0 = \pm k \left| \int \rho d\phi \right|_{\phi=\phi_0} + c \quad (3.23)$$

Sendo c uma constante qualquer pode ser eliminada conjugando as equações 3.22 e 3.23

$$R = R_0 \pm k \int_{\phi_0}^{\phi} \rho d\phi \quad (3.24)$$

No caso de estarmos perante uma situação do hemisfério Norte, deverá ser adoptado o sinal negativo de forma que o valor de R cresça no sentido do polo norte para o ponto e a latitude cresça do equador para o polo norte, ou seja, que as duas coordenadas tenham sentidos contrários de crescimento. Neste caso a expressão assume o aspecto:

$$R = R_0 - k \int_{\phi_0}^{\phi} \rho d\phi \quad (3.25)$$

Vamos tentar inferir a conformidade no meridiano central. Para que o sistema seja conforme no meridiano central é necessário impor que o módulo no meridiano central ($\lambda=0$) e na direcção do paralelo ($d\phi=0$) seja igual. Obtêm-se assim os seguintes elementos lineares:

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 d\lambda^2 \\ ds_1^2 &= R^2 m^2 F^2(\phi) d\lambda^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Logo

$$\frac{ds_1}{ds} = k = \frac{RmF(\phi)d\lambda}{rd\lambda} \quad (3.27)$$

Substituindo $F(\phi)$ pela sua expressão obtém-se

$$k = \frac{Rm \frac{\rho r}{R \left| \frac{dR}{d\phi} \right|}}{r} = \frac{m\rho}{\left| \frac{dR}{d\phi} \right|} = \frac{m\rho}{k\rho} = \frac{m}{k} \quad (3.28)$$

donde $k^2 = m$.

Introduzindo este novo elemento nas equações 3.17 e 3.25 obtêm-se as fórmulas de transformação gerais:

$$\begin{cases} R = R_0 - \sqrt{m} \int_{\phi_0}^{\phi} \rho d\phi \\ \theta = -\frac{\sqrt{m} r \lambda}{R} \end{cases} \quad (3.29)$$

A última etapa consiste na imposição de que o módulo linear seja tanto quanto possível constante, ou seja, que a projecção seja quanto possível conforme. Nesta ordem de ideias é imposta como condição que seja \sqrt{m} o módulo linear respeitante aos elementos lineares no paralelo central ($\phi=\phi_0$) dirigidos segundo o meridiano ($d\lambda=0$). Assim, sobre o elipsóide:

$$ds^2 = \rho_0^2 d\phi^2 \quad (3.30)$$

e sobre o plano

$$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 \quad (3.31)$$

como

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\partial R}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial R}{\partial \lambda} d\lambda = \\ &= -\sqrt{m} \rho_0 d\phi^2 \end{aligned}$$

então

$$dR^2 = m \rho_0^2 d\phi^2 \quad (3.32)$$

Relativamente a $d\theta$:

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} d\phi$$

e

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= \left(\frac{\sqrt{m}\lambda}{R} \sin \phi \cdot \rho - \frac{\sqrt{m} r \lambda}{R_0^2} \rho_0 \sqrt{m} \right)^2 d\phi^2 \\ &= -\frac{\sqrt{m}\lambda}{R} \cdot \frac{dr}{d\phi} - \frac{\sqrt{m} r \lambda \sqrt{m} \rho_0}{R_0^2} d\phi \end{aligned} \quad (3.33)$$

então o elemento linear é:

$$ds_1^2 = m \rho_0^2 d\phi^2 + R_0^2 \left[\left(\frac{\sqrt{m}\lambda}{R_0} \sin \phi_0 \times \rho_0 - \frac{\sqrt{m} r_0 \lambda}{R_0^2} \rho_0 \sqrt{m} \right)^2 d\phi^2 \right] \quad (3.34)$$

Obtém-se assim:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = m + R_0^2 \left(\frac{\sqrt{m}}{R_0} \sin \phi_0 - \frac{mr_0}{R_0^2} \right)^2 \lambda^2 = m \quad (3.35)$$

Devendo a igualdade verificar-se para qualquer valor de λ , então:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{R_0} \sin \phi_0 - \frac{mr_0}{R_0^2} \right)^2 = 0$$

ou seja $R_0 \sqrt{m} \sin \phi_0 = mr_0$

$$R_0 = \frac{\sqrt{m} r_0}{\sin \phi_0} = \sqrt{m} N_0 \cotg \phi_0$$

As fórmulas de transformação finais são:

$$\begin{cases} R = R_0 - \sqrt{m} \int_{\phi_0}^{\phi} \rho d\phi \\ R_0 = \sqrt{m} N_0 \cotg \phi_0 \\ \theta = \frac{\sqrt{m} r \lambda}{R} \end{cases} \quad (3.36)$$

Fazendo $m=1$, como é o caso da cartografia portuguesa continental obtém-se:

$$\begin{cases} R = R_0 - \int_{\phi_0}^{\phi} \rho d\phi = R_0 - \sigma \\ R_0 = N_0 \cotg \phi_0 \\ \theta = \frac{r \lambda}{R} \end{cases} \quad (3.37)$$

Para regiões alongadas na direcção Norte/Sul e estreitas na direcção Este/Oeste, como é o caso de Portugal, a projecção de Bonne tem umas deformações angulares pequenas ou, por outras palavras, ela é quase conforme; ela é mesmo rigorosamente conforme sobre o meridiano central e sobre o paralelo central.

3.3.1 Interpretação geométrica da projecção de Bonne

Traçando a recta representativa do meridiano central e escolhendo um ponto O para centro dos arcos de circunferência representativos do paralelo, traça-se o arco de raio R_0 :

$$R_0 = N_0 \cot \phi_0$$

Desta forma está representado o paralelo central. De notar que R_0 é o lado do cone circunscrito ao elipsóide e tangente ao longo do paralelo central. Para representar um ponto genérico P traça-se o arco de circunferência de raio

$$R = R_0 - \sigma$$

sendo σ o arco de meridiano entre as latitudes ϕ_0 e ϕ ; o arco traçado é a imagem do paralelo de P. Marcando sobre ele um comprimento $A_1 P_1$ igual ao correspondente AP sobre o elipsóide. Fica assim definido o mecanismo geométrico de correspondência. As coordenadas cartográficas (M, P) são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} M &= R \sin \theta = (R_0 - \sigma) \sin \theta \\ P &= R_0 - R \cos \theta = R_0 - (R_0 - \sigma) \cos \theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que

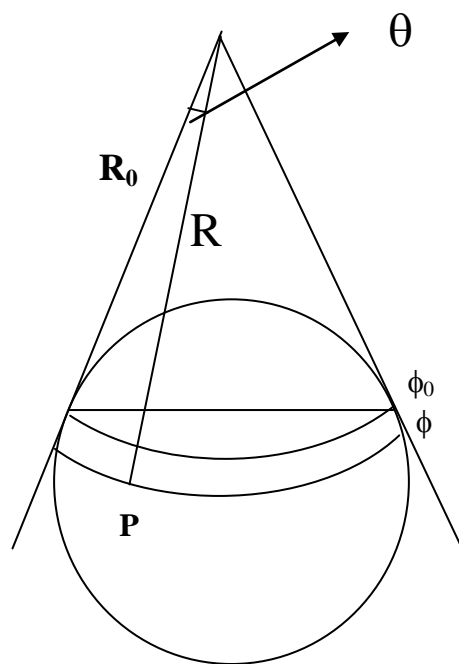
$$R_0 = N_0 \cot \phi_0$$

$$R = R_0 - \sigma$$

$$\theta = \frac{r \lambda}{R}$$

A transformação inversa é dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{M}{R_0 - P} \\ R &= \frac{R_0 - P}{\cos \theta} = \frac{M}{\sin \theta} \\ \sigma &= R_0 - R \\ \lambda &= \frac{R \theta}{r} \end{aligned}$$



Capítulo 4

Representações Conformes ou Isogónicas

4.1 Definição

Uma projecção diz-se **conforme ou isogónica** se o módulo da deformação linear k for independente do azimute, donde que para que tal aconteça a derivada de k em ordem a α seja nula. Sendo a deformação linear dada pela expressão:

$$k^2 = e \cos^2 \alpha + 2f \sin \alpha \cos \alpha + g \sin^2 \alpha \quad (4.1)$$

então

$$\frac{d}{d\alpha}(k^2) = \frac{d}{d\alpha}(e \cos^2 \alpha + 2f \sin \alpha \cos \alpha + g \sin^2 \alpha) = 0 \quad (4.2)$$

ou seja

$$(g - e) \sin 2\alpha + 2f \cos 2\alpha = 0 \quad (4.3)$$

Devendo esta equação ser verificada para qualquer valor de α , verifica-se que em particular para $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/4$ o valor de $f=0$ e $g-e = 0$. Assim para uma representação conforme a expressão (4.1) escreve-se:

$$k^2 = e \quad (4.4)$$

A indicatriz da deformação linear será uma circunferência; sendo $k_1 = k_2$ a expressão da deformação angular (2.65) reduz-se a:

$$\text{tg } \delta = 0 \quad (4.5)$$

ou seja, a deformação angular é nula em todos os azimutes. Sendo assim o ângulo de dois elementos não é alterado pela representação.

4.2 Coordenadas isométricas

Um sistema de coordenadas curvilíneas diz-se isométrico se o elemento linear tiver a forma:

$$ds^2 = \gamma (\alpha^2 + \beta^2) \quad (4.6)$$

sendo γ uma função de α e β .

No caso das coordenadas cartesianas ortogonais (x,y) no plano, o elemento linear é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

o que significa, pela definição anterior, que este tipo de coordenadas constitui um sistema isométrico.

No caso das coordenadas polares R e θ no plano, o elemento linear é dado por:

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2$$

pelo que o sistema não é isométrico. No entanto é possível transformar este sistema num outro sistema equivalente que seja isométrico. Pondo em evidência a variável R , obtém-se:

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dR^2}{R^2} + d\theta^2 \right)$$

fazendo $d\mu = dR / R$ ($\mu = \log R + p$), do que resulta $R = p e^\mu$, em que p é uma constante de integração, então é possível reescrever a expressão do elemento linear sob a forma:

$$ds^2 = p^2 e^{2\mu} (d\mu^2 + d\theta^2) \quad (4.7)$$

em que as coordenadas μ e θ são isométricas.

No caso do elipsóide, o sistema de coordenadas (ϕ, λ) , latitude e longitude, também não é um sistema isométrico, uma vez que o elemento linear é dado por:

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (4.8)$$

A exemplo do que foi efectuado para as coordenadas polares é possível efectuando uma operação de mudança de variável encontrar um sistema isométrico sobre o elipsóide. Para isso, colocando r em evidência:

$$ds^2 = r^2 \left(\frac{\rho^2}{r^2} d\phi^2 + d\lambda^2 \right) \quad (4.9)$$

e introduzindo uma nova coordenada Φ , designada latitude isométrica, cuja relação com a latitude geodésica é dada por:

$$\Phi = \int \frac{\rho}{r} d\phi \quad (4.10)$$

obtem-se uma nova expressão do elemento linear dado por:

$$ds^2 = r^2 (d\Phi^2 + d\lambda^2) \quad (4.11)$$

O sistema de coordenadas (Φ, λ) no elipsóide definido desta forma é um sistema isométrico.

Atendendo às expressões de r e ρ o integral indefinido da latitude isométrica é escrito como :

$$\Phi = I_n \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{e/2} \right] \quad (4.12)$$

em que e representa a excentricidade do elipsóide e I_n o logaritmo natural. De notar que a latitude isométrica se torna infinita nas regiões polares e assume o valor zero no equador.

Duma maneira geral pode demonstrar-se que, dada uma superfície S , é possível escolher-se sobre essa superfície e de uma infinidade de maneiras, um sistema de coordenadas isométrico. Chamam-se linhas isométricas às linhas coordenadas de um sistema isométrico. É também fácil verificar que uma projecção conforme faz corresponder às linhas isométricas de uma superfície linhas isométricas da outra. Seja ds^2 o elemento linear na superfície S e ds_1^2 o elemento linear na superfície S_1 , então, se a projecção for conforme, o elemento linear $ds_1^2 = k^2 ds^2$ em que k é o módulo de deformação linear (constante em todas as direcções, numa projecção conforme). Consequentemente $ds_1^2 = k^2 \gamma (d\alpha^2 + d\lambda^2)$ e o sistema é ainda isométrico dada o valor constante do módulo linear.

4.3 Expressão geral das projecções conformes

Sejam duas superfícies S e S_1 e sobre elas os sistemas isométricos (α, β) e (α_1, β_1)

$$ds^2 = \gamma (d\alpha^2 + d\beta^2) \quad (4.13)$$

$$ds_1^2 = \gamma_1 (d\alpha_1^2 + d\beta_1^2) \quad (4.14)$$

e sejam as seguintes fórmulas de transformação entre as duas superfícies:

$$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha, \beta)$$

$$\beta_1 = \beta_1(\alpha, \beta)$$

$$d\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} d\beta$$

$$d\beta_1 = \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} d\beta$$

Pretende-se determinar a forma das funções $\alpha_1(\alpha, \beta)$ e $\beta_1(\alpha, \beta)$ de modo que a representação seja conforme. Calculando $d\alpha_1$ e $d\beta_1$ e substituindo no elemento linear 4.14, obtém-se a seguinte expressão para o módulo da deformação linear:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{1}{d\alpha^2 + d\beta^2} (e_2 d\alpha^2 + f_2 d\alpha d\beta + g_2 d\beta^2) \quad (4.15)$$

em que:

$$e_2 = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} \right)^2$$

$$f_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta}$$

$$g_2 = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} \right)^2$$

A condição necessária e suficiente para que o módulo de deformação linear seja independente da orientação de ds é que:

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} \right)^2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} = 0 \quad (4.17)$$

Com efeito, neste caso o módulo da deformação linear fica reduzido a

$$k^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma} e_2,$$

ou seja é constante para cada ponto e independente de $d\alpha$ e $d\beta$.

A segunda das condições (eq. 4.17) pode escrever-se da seguinte forma:

$$\frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta_1}}{\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}} = -\frac{\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} = \eta \quad (4.18)$$

representando por η o valor comum das duas fracções. Reescrevendo esta expressão separando as duas fracções, resulta que:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} = \eta \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} = -\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} \quad (4.19)$$

Substituindo na igualdade 4.16 e considerando ainda a igualdade 4.17, obtêm-se as seguintes condições:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} = \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} = \pm \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} \quad (4.20)$$

Estas igualdades constituem uma das expressões das projecções conformes. Estas expressões contêm as condições de Riemann que definem a condição necessária e suficiente para que uma qualquer função f seja analítica. Deste modo, definindo uma função f qualquer da seguinte forma:

$$z_1 = f(z)$$

em que z e z_1 são variáveis complexas (definidas por $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, e $z = \alpha + \beta i$), então se a função f for uma função analítica define uma representação conforme. Resumindo, diz-se que se estabelece uma representação conforme escrevendo:

$$\alpha_1 \pm \beta_1 i = f(\alpha \pm \beta i) \quad (4.21)$$

onde f é o símbolo de função analítica arbitrária e onde α e β são coordenadas isométricas. Esta expressão é designada expressão geral das projecções conformes.

4.4 Relação entre as curvaturas geodésicas de duas linhas

Seja ℓ uma linha de S e ℓ' a sua transformada em S_1 , numa representação conforme de S sobre S_1 . Tomemos sobre S um sistema de coordenadas ortogonais u, v tal que a linha ℓ seja uma linha coordenada $u=\text{const}$. A representação sendo conforme fará corresponder às linhas coordenadas de S , linhas coordenadas também ortogonais u, v sobre S_1 e será :

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \quad (4.22)$$

$$ds_1^2 = k^2 E du^2 + k^2 G dv^2 \quad (4.23)$$

As curvaturas geodésicas Γ_u e Γ'_u de ℓ e ℓ' serão dadas por :

$$\Gamma_u = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \quad \Gamma'_u = -\frac{1}{k^2\sqrt{EG}} \frac{\partial k\sqrt{G}}{\partial u} \quad (4.24)$$

resolvendo a derivada parcial em ordem a u, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Gamma'_u &= -\frac{1}{k\sqrt{EG}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{1}{k^2\sqrt{E}} \frac{\partial k}{\partial u} \\ &= \frac{\Gamma_u}{k} - \frac{1}{k^2\sqrt{E}} \frac{\partial k}{\partial u} \end{aligned}$$

donde

$$k\Gamma'_u = \Gamma_u - \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial k}{\partial u} \quad (4.25)$$

É fácil ver o significado de $\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial k}{\partial u}$; a derivada de k segundo uma direcção s qualquer é:

$$\frac{dk}{ds} = \frac{\partial k}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial k}{\partial v} \frac{dv}{ds} \quad (4.26)$$

Se essa direcção for a das linhas $v=\text{const.}$ ($dv=0$)

$$\frac{dk}{ds_v} = \frac{\partial k}{\partial u} \frac{du}{ds_v} \quad (4.27)$$

e atendendo a que $du/ds_v = 1/\sqrt{E}$ então:

$$\frac{dk}{ds_v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial k}{\partial u} \quad (4.28)$$

donde

$$k\Gamma'_u = \Gamma_u - \frac{1}{k} \frac{dk}{ds_v} \quad (4.29)$$

Deverá notar-se que esta fórmula tem um significado independente das coordenadas curvilíneas adoptadas, apenas por comodidade as coordenadas foram escolhidas por forma a que $u=\text{const.}$ em ambas as superfícies. A igualdade anterior poderá então escrever-se:

$$k\Gamma' = \Gamma - \frac{1}{k} \frac{dk}{dn} \quad (4.30)$$

No caso em que a linha ℓ é uma linha geodésica, então $\Gamma=0$ e a equação anterior transforma-se na seguinte expressão:

$$\Gamma' = -\frac{1}{k^2} \frac{dk}{dn}$$

mas visto que

$$k \, dn = dn_1$$

será então

$$\Gamma' = -\frac{1}{k} \frac{dk}{dn_1} \quad (4.31)$$

Esta igualdade constitui o Teorema de Schols.

4.5 Projecção de Mercator

4.5.1 Introdução

A projecção de Mercator é uma projecção cilíndrica conforme. Gerardo Kramer (1512-1591), cartógrafo Flamengo, tenta corrigir a representação do Mediterrâneo de Ptolomeu e constrói um Mapa Mundo com base numa projecção matemática, onde os paralelos e meridianos se projectam num plano todos perpendiculares entre si, projectou também a esfera num cilindro tangente ao equador, onde os meridianos são paralelos equidistantes entre si e os paralelos afastam-se uns dos outros a medida que se aproximam dos pólos.

A projecção de Mercator, imaginada no século XVI, foi concebida para reduzir os problemas de orientação no decorrer da navegação. O principal problema, de um navegador, é saber como orientar o seu navio, para que, partindo de um determinado lugar (A), consiga atingir um destino previamente definido (B). A linha mais simples de percorrer será a linha de azimute constante – **loxodrómica**, com o auxílio de uma bússola é possível manter a constância do azimute. Para sabermos qual o azimute α da loxodrómica que une A e B (fig. 4.1), imaginamos uma carta conforme em que os meridianos são representados por rectas paralelas. Devido à conformidade do sistema a transformada de uma loxodrómica é uma recta cortando as transformadas dos meridianos segundo o ângulo α , dispondo de uma tal carta basta unir os pontos A e B por uma recta e medir o ângulo α . A formulação existente na projecção de Mercator baseia-se fundamentalmente no elipsóide sobre o qual escolhemos as coordenadas Φ e λ , respectivamente a latitude isométrica e longitude, sobre o plano escolhemos as coordenadas cartesianas x, y cuja a relação com a latitude isométrica e longitude é obtida por uma função f qualquer analítica que obedece à condição geral das projecções conformes.

4.5.2 Fórmulas de transformação directa

Estabelecendo um sistema cartesiano (x,y) sobre o plano e adoptando o sistema curvilíneo (Φ, λ) no elipsóide, em que Φ é a latitude isométrica, verifica-se que pela expressão 4.21 para λ=0 tem-se x=0, o que significa que o meridiano central é representado pelo eixo oy das ordenadas, logo os outros meridianos terão de ser representados por rectas paralelas a esse eixo, isto é:

para λ= constante tem-se x=constante

Desenvolvendo f em serie de McLaurin e separando as partes reais das partes imaginárias, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 y &= f(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!} \left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \right)_{\lambda=0} + \dots \\
 x &= \lambda \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!} \left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3} \right)_{\lambda=0} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

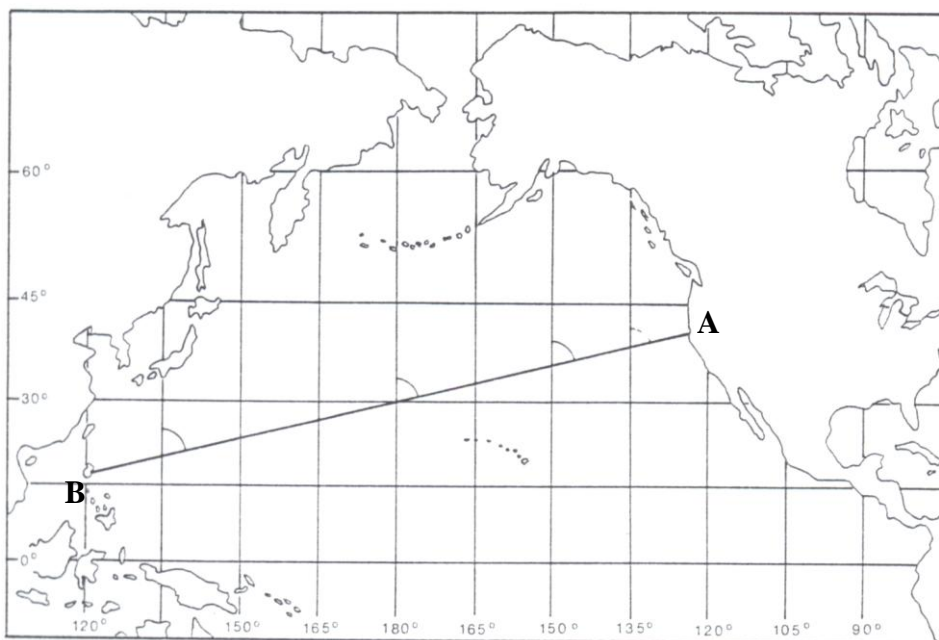


Fig. 4.1 – Loxodrómica, linha de azimute constante.

Para que a coordenada x dependa unicamente da longitude é necessário impor que:

$$\left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} = C \quad (4.33)$$

onde C é uma constante. Assim, para $\lambda=0$ a função f é dada por:

$$f = C\Phi + C_1$$

e para um qualquer valor da longitude:

$$f = C(\Phi + i\lambda) + C_1 \quad (4.34)$$

Então

$$y + ix = C(\Phi + i\lambda) + C_1 \quad (4.35)$$

Da equação 4.35 resultam as fórmulas de transformação de latitude isométrica e longitude em coordenadas cartesianas x e y:

$$\begin{aligned} y &= C\Phi + C_1 \\ x &= C\lambda \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para um valor constante da latitude isométrica Φ obtém-se um valor constante de y, e consequentemente os paralelos são representados por rectas paralelas ao eixo ox, previsível em virtude da conformidade do sistema. Caso se pretenda que o equador seja representado pelo eixo das abcissas deverá fazer-se $C_1=0$ de modo a se obter

$$\begin{aligned} y &= C\Phi \\ x &= C\lambda \end{aligned} \quad (4.37)$$

Um elemento do equador, e outro, sobre a carta, será, respectivamente

$$\begin{aligned} ds &= a d\lambda \\ dx &= C d\lambda \end{aligned} \quad (4.38)$$

Por outro lado os elementos lineares, sobre o elipsóide e sobre o plano são:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 = r^2 (d\Phi^2 + d\lambda^2) \\ ds_1^2 &= dx^2 + dy^2 = C^2 d\Phi^2 + C^2 d\lambda^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

então o módulo de deformação linear é dado por:

$$k = \frac{C}{r} \quad (4.40)$$

Pretendendo que sobre o equador o módulo de deformação linear seja 1 ($k=1$), então C deverá ser a ($C=a$), onde a é o **raio equatorial do elipsóide**. Substituindo o valor de C , as fórmulas da transformação escrevem-se:

$$\begin{aligned} y &= a\Phi \\ x &= a\lambda \end{aligned} \quad (4.41)$$

O módulo areal é nesta projecção dado por

$$m = \frac{a^2}{r^2} \quad (4.42)$$

Considerando uma esfera de raio a , e atendendo que $r = a \cdot \cos\phi$, tem-se neste caso:

$$m = \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (4.43)$$

Para valores da latitude geodésica de $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ obtêm-se valores de deformação areal de $m = 1, 2, 4$, respectivamente. Verifica-se que as deformações areais assumem rapidamente valores muito elevados com o afastamento em relação ao equador ou ao paralelo origem da projecção.

Tendo como objectivo a obtenção de uma expressão da deformação linear que seja função directa do afastamento ao equador desenvolve-se a fórmula 4.41 em série de Taylor em função do comprimento do arco de meridiano σ , obtendo-se:

$$y = \sigma \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)_0 + \frac{\sigma^2}{2!} \left(\frac{d^2 y}{d\sigma^2} \right)_0 + \frac{\sigma^3}{3!} \left(\frac{d^3 y}{d\sigma^3} \right)_0 + \quad (4.44)$$

As derivadas de y em ordem a σ são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\sigma} &= a \frac{d\Phi}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma} = a \frac{\rho}{r} \frac{1}{\rho} = \frac{a}{r} \\ \frac{d^2 y}{d\sigma^2} &= -\frac{a}{r^2} \frac{dr}{d\sigma} = \frac{a \cdot \text{sen } \phi}{r^2} \\ \frac{d^3 y}{d\sigma^3} &= \frac{a \cdot \cos \phi}{r^2} \frac{1}{\rho} + [\dots] \text{sen } \phi \end{aligned} \quad (4.45)$$

Fazendo $\phi = 0$ e substituindo na expressão de y e com desprezo dos termos de grau superior a três:

$$y = \sigma + \frac{\sigma^3}{6a\rho_0} \quad (4.46)$$

então:

$$k = \frac{dy}{d\sigma} = 1 + \frac{\sigma^2}{2a\rho_0} \quad (4.47)$$

em que ρ_0 é o **raio de curvatura do meridiano** num ponto do equador. A fórmula mostra que k cresce muito rapidamente com a distância ao equador pelo que o sistema está indicado para zonas equatoriais alongadas na direcção EW mas estreitas na direcção NS. Se for este o caso então:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx y \\ k &= 1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Como as deformações aumentam com a distância ao equador, é frequente a utilização de um artifício que se baseia na multiplicação de todos os comprimentos da carta por $k_0 < 1$, ou, o que é o mesmo, se escrevermos as fórmulas directas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y &= k_0 a \Phi \\ x &= k_0 a \lambda \end{aligned} \quad (4.49)$$

o modulo k será

$$\begin{aligned} k &= k_0 \frac{a}{r} \\ k &= k_0 \left(1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Sobre o equador, será agora $k=k_0 < 1$; nos pontos de ordenada y tal que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} &= \frac{1}{k_0} \\ y &= \pm \sqrt{2a\rho_0 \left(\frac{1}{k_0} - 1 \right)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

será $k=1$. Só para distâncias superiores aqueles valores será $k>1$.

4.5.3 Correccção à corda

A curvatura geodésica Γ é dada pelo teorema de Schols:

$$\Gamma = \frac{1}{k} \frac{dk}{dn}$$

em que

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dy} \frac{dy}{dn} + \frac{dk}{dx} \frac{dx}{dn}$$

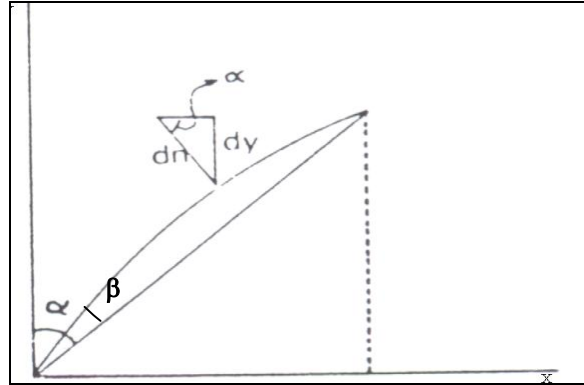


Fig. 4.2 – Correção à corda (β)

Sendo

$$\frac{dy}{dn} = \sin \alpha \Rightarrow dn = \frac{dy}{\sin \alpha} = \frac{dy}{\frac{x_B - x_A}{L}} \quad (4.52)$$

donde

$$\Gamma = \frac{1}{k} \frac{x_B - x_A}{L} \frac{dk}{dy} = \frac{1}{k} \frac{x_B - x_A}{L} \frac{y}{a \rho_0}$$

atendendo a que k é próximo de 1 e fazendo

$$y_{1/3} = y_A + \frac{1}{3}(y_B - y_A) = \frac{2y_A + y_B}{3}$$

temos

$$\Gamma_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3a\rho_0} \frac{(2y_A + y_B)(x_B - x_A)}{L} \quad (4.53)$$

Donde finalmente, obtemos a correção β tangente – corda,

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \Gamma_{\frac{1}{3}} \cdot L$$

$$\beta'' = \frac{1}{6a\rho_0 \sin 1''} (2y_A + y_B)(x_B - x_A) \quad (4.54)$$

NOTA: $\beta'' > 0$ ou $\beta'' < 0$ conforme o sinal que se tenha adoptado para o sinal positivo dos eixos.

4.5.4 Correção a aplicar a um comprimento finito elipsóidico para se obter o comprimento cartográfico

Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será dado por:

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \left(1 - \frac{y^2}{2a\rho_0}\right) ds_1 \quad (4.55)$$

mas

$$ds_1 = \frac{dy}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\frac{y_B - y_A}{s_1}}$$

donde

$$ds = \frac{s_1}{y_B - y_A} \left(1 - \frac{y^2}{2a\rho_0}\right) dy \quad (4.56)$$

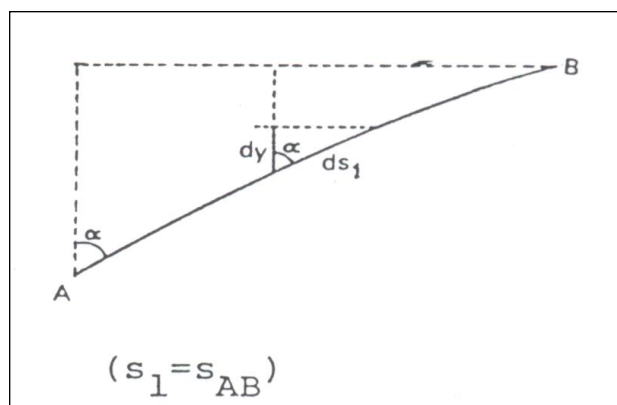


Fig. 4.3 – Correção de um elemento finito.

Então:

$$s = \frac{s_1}{y_B - y_A} \int_{y_A}^{y_B} \left(1 - \frac{y^2}{2a\rho_0}\right) dy$$

$$s = s_1 - \frac{1}{2a\rho_0} \frac{s_1}{y_B - y_A} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y_A}^{y_B}$$

$$s = s_1 - \frac{1}{6a\rho_0} s_1 (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2)$$

A correção s_1-s é dada por:

$$s_1 - s = \frac{1}{6a\rho_0} s_1 (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \quad (4.57)$$

4.5.5 Fórmulas de transformação inversa

Partindo das expressões da transformação directa, obtêm-se imediatamente as formulas inversas:

$$\Phi = \frac{y}{a} \quad (4.58)$$

$$\lambda = \frac{x}{a}$$

4.5.6 Comprimento de um arco de loxodrómica

Pela figura 4.4, temos que:

$$ds = \frac{1}{\cos \alpha} d\sigma$$

$$s = \frac{1}{\cos \alpha} \int d\sigma = \frac{\sigma}{\cos \alpha} \quad (4.59)$$

Para determinar o comprimento de um arco de loxodrómica basta dividir o arco de meridiano entre duas latitudes pelo coseno do azimute da loxodrómica.

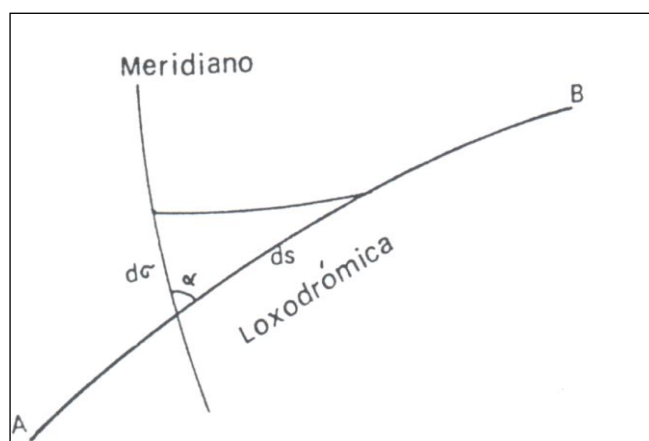


Fig. 4.4 – Loxodrómica

4.6 Projecção de Lambert (cónica conforme)

4.6.1 Introdução

A projecção de Mercator estudada anteriormente é, como se salientou, adaptada para representar uma faixa equatorial alongada na direcção EW, mas com pouco desenvolvimento na direcção NS. Os paralelos são representados por segmentos de recta iguais, o que, dada a conformidade implica uma dilatação dos elementos lineares, dilatação tanto maior quanto maior for a distância ao equador. Este inconveniente resulta da condição de paralelismo imposta às rectas representativas dos meridianos. Abandonando esta condição de paralelismo entre os meridianos é possível construir um sistema conforme em que os meridianos sejam rectas não paralelas. Claro que, visto que os meridianos convergem nos polos, estas rectas hão-de ser concorrentes, o ponto de convergência sendo o homólogo do polo norte ou o homólogo do polo sul; e ainda, dada a conformidade do sistema, os paralelos hão-de ser representados por circunferências concêntricas de centro no ponto de concorrência daquelas rectas.

Duma maneira geral numa projecção cilíndrica os meridianos são representados por rectas paralelas e numa projecção cónica são representados por rectas concorrentes. A projecção de Mercator é uma projecção cilíndrica conforme; a projecção de Lambert apresentada nesta secção é uma projecção cónica conforme.

4.6.2 Fórmulas de transformação directa

Tomando sobre o elipsóide as coordenadas Φ e λ , latitude isométrica e longitude, e sobre o plano as coordenadas polares isométricas μ e θ , impondo a condição de conformidade:

$$\mu + i\theta = f(\Phi + i\lambda) \quad (4.60)$$

para $\lambda=0$ obtém-se $\theta=0$ o que mostra que o meridiano origem das longitudes é representado pelo eixo polar; por outro lado pretende-se que seja $\theta=\text{const.}$ para $\lambda=\text{const.}$

Ora tem-se:

$$\begin{aligned} \mu &= (f(\Phi))_{\lambda=0} - \frac{\lambda^2}{2!} \left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \right)_{\lambda=0} + \dots \\ \theta &= \lambda \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!} \left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3} \right)_{\lambda=0} + \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

Não devendo θ depender de Φ tem-se:

$$\left(\frac{df}{d\Phi}\right)_{\lambda=0} = h \quad \text{sendo } h=\text{const.} \quad (4.62)$$

e portanto, para $\lambda=0$, $f = h\Phi$, $df = h d\Phi$, e para λ qualquer $f = h(\Phi + i\lambda)$, donde:

$$\begin{aligned} \mu &= h\Phi \\ \theta &= h\lambda \end{aligned} \quad (4.63)$$

A coordenada R está relacionada com a coordenada isométrica μ pela expressão $R = pe^{\mu}$. Substituindo o valor da coordenada μ pela expressão anterior obtemos $R = pe^{h\Phi}$.

Seja ϕ_0 a latitude do paralelo central da região e R_0 (a determinar) o raio do arco de circunferência representativo daquele paralelo; será

$$R_0 = pe^{h\Phi_0} \quad (4.64)$$

e eliminando p resultam as seguintes fórmulas de transformação:

$$\begin{aligned} R &= R_0 e^{h(\Phi-\Phi_0)} \\ \theta &= h\lambda \end{aligned} \quad (4.65)$$

Sobre o elipsóide e sobre o plano, respectivamente:

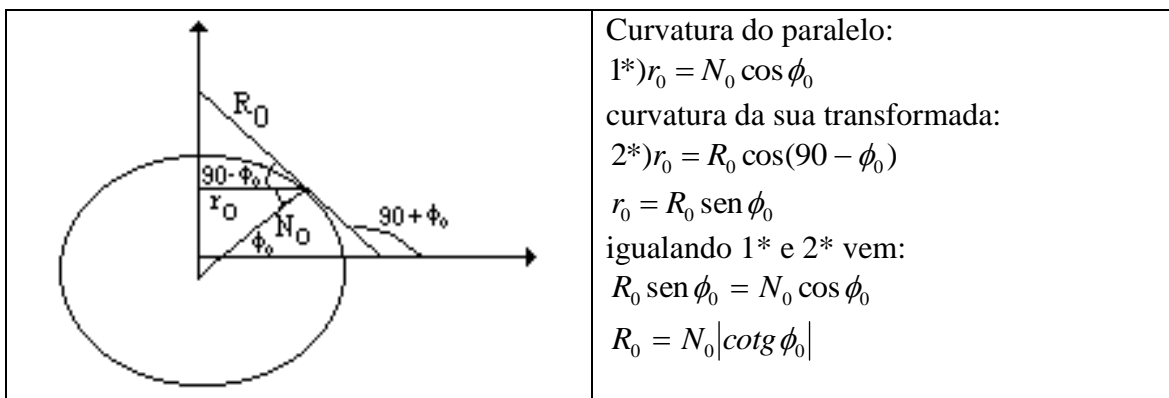
$$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 = h^2 R_0^2 e^{2h(\Phi-\Phi_0)} (d\Phi^2 + d\lambda^2)$$

donde o módulo linear

$$\begin{aligned} k &= \frac{ds_1}{ds} \\ k &= \frac{|h|R_0 e^{h(\Phi-\Phi_0)}}{r} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Escrevendo $\sqrt{h^2} = |h|$ para cobrir a hipótese de $h < 0$. Como era de esperar k é independente da orientação de ds . Deve ser $k=1$ no paralelo central. Como nesse paralelo $\Phi=\Phi_0$

$$1 = \frac{|h|R_0}{r_0} = \frac{|h|R_0}{N_0 \cos \phi_0} \quad (4.67)$$



Igualando as curvaturas do paralelo e da sua transformada

$$N_0 |\cot g \phi_0| = R_0 \tag{4.68}$$

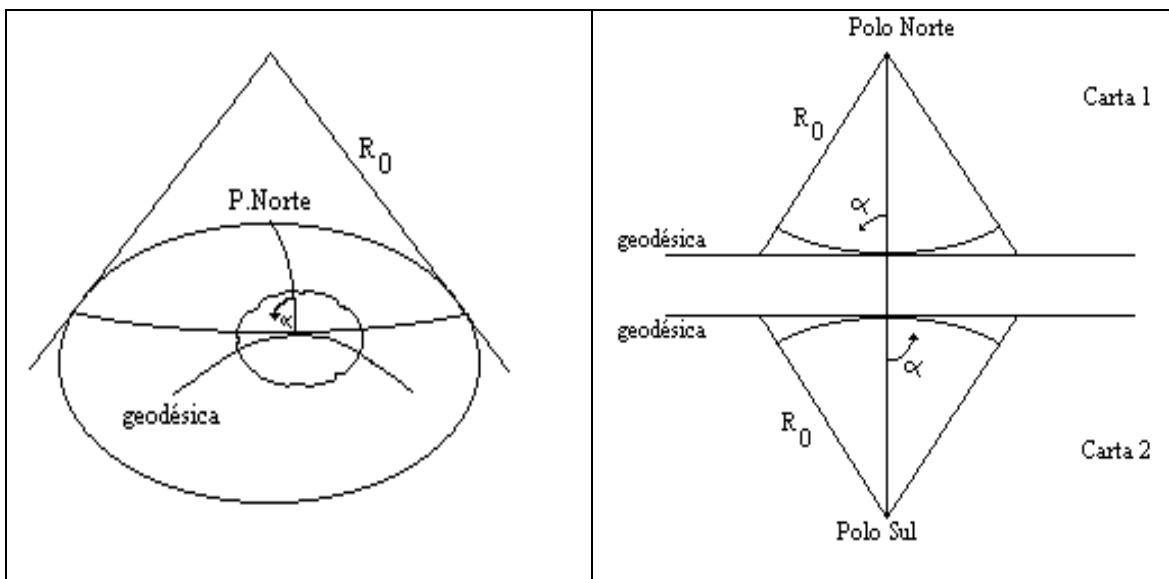
com o sinal do módulo para cobrir a hipótese de $\phi_0 < 0$. A última igualdade determina R_0 a anterior dá então:

$$|h| = |\sin \phi_0|$$

donde

$$h = \pm \sin \phi_0 \tag{4.69}$$

Na realidade há apenas uma solução.



Note-se em primeiro lugar $R = R_0 e^{h(\phi - \phi_0)}$ que se $h < 0$ só o hemisfério norte é representado pois que para $\phi = 90^\circ R = 0$ e para $\phi = -90^\circ R = \infty$, e que se $h > 0$ só o hemisfério sul figurará na carta. Suponhamos para fixar ideias que $\phi_0 > 0$; fazendo $h = -\sin \phi_0$ teríamos a carta 1; fazendo $h = +\sin \phi_0$ teríamos a carta 2; mas esta última não responde ao nosso problema pois que as curvaturas geodésicas ficam iguais mas de sinais contrários. Analisando agora o

caso $\phi_0 < 0$ concluiríamos que deveria ser igualmente $h = -\text{sen}\phi_0$. Fixados os parâmetros lineares:

$$h = -\text{sen}\phi_0 \quad (\phi_0 < 0) \quad (4.70)$$

$$R_0 = N_0 |\cot g\phi_0|$$

as fórmulas :

$$R = R_0 e^{-\text{sen}\phi_0(\Phi - \Phi_0)} \quad (4.71)$$

$$\theta = -\text{sen}\phi_0 \lambda$$

resolvem o problema directo. Mas a primeira, devido à presença da latitude isométrica é complicada; podemos modificá-la. Desenvolvendo R em séries de potências de σ -arco do meridiano contado a partir do paralelo central:

$$R = R_0 + \left(\frac{dR}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \left(\frac{d^2R}{d\sigma^2}\right)_0 \frac{\sigma^2}{2!} + \left(\frac{d^3R}{d\sigma^3}\right)_0 \frac{\sigma^3}{3!} + \dots \quad (4.72)$$

Calculando as derivadas

	$\frac{dr}{d\sigma} = -\text{sen}\phi$ $d\Phi = \frac{\rho}{r} d\phi$		$d\sigma = \rho \cdot d\phi$ $\rho = \frac{d\sigma}{d\phi}$
--	---	--	---

$$\frac{dR}{d\sigma} = hR_0 e^{(\Phi - \Phi_0)} \frac{d\Phi}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\sigma} = hR_0 e^{(\Phi - \Phi_0)} \frac{\rho}{r} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{hR_0 e^{(\Phi - \Phi_0)}}{r} = \frac{hR}{r} \quad (4.73a)$$

$$\frac{d^2R}{d\sigma^2} = \frac{h}{r} \frac{dR}{d\sigma} - \frac{hR}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\sigma} = \frac{h^2R}{r^2} + \frac{hR}{r^2} \text{sen}\phi = \frac{hR}{r^2} (h + \text{sen}\phi) \quad (4.73b)$$

$$\frac{d^3R}{d\sigma^3} = \frac{hR}{r^2} \cos\phi \frac{d\phi}{d\sigma} + (h + \text{sen}\phi)(\dots) = \frac{hR \cos\phi}{\rho r^2} + (h + \text{sen}\phi)(\dots) \quad (4.73c)$$

Para maior simplicidade suponhamos $\phi_0 > 0$; fazendo $\phi = \phi_0$ nas expressões anteriores

$\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)_0 = \frac{hR_0}{r_0} = -1$	$h = -\text{sen}\phi_0$ $r_0 = R_0 \text{sen}\phi_0$ $\frac{hR_0}{r_0} = \frac{-\text{sen}\phi_0 \cdot R_0}{R_0 \text{sen}\phi_0} = -1$
---	---

$\left(\frac{d^2R}{d\sigma^2}\right)_0 = 0$	$\frac{hR}{r^2}(h + \text{sen } \phi_0) = \frac{-\text{sen } \phi_0 \cdot R_0}{R_0^2 \text{sen } \phi_0}(-\text{sen } \phi_0 + \text{sen } \phi_0) = 0$
---	---

$$\frac{d^3R}{d\sigma^3} = \frac{hN_0 \cot \phi_0}{\rho_0 N^2 \cos^2 \phi_0} \cos \phi_0 = -\frac{1}{\rho_0 N_0} \tag{4.74}$$

Note-se que $\frac{dR}{d\sigma}$ é ao longo do meridiano, aparte o sinal, igual a k; portanto

$$\left(\frac{d^2R}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{dk}{d\sigma}\right)_0 = 0 \tag{4.75}$$

confirma que fomos bem sucedidos ao escolher $h = -\text{sen } \phi_0$, a variação de k ao longo do meridiano é nula, ou seja, o modulo da deformação linear é constante ao longo do meridiano. Substituindo na expressão de R e fazendo $y = R_0 - R$

$$y = R_0 - R = \sigma + \frac{\sigma^3}{6N_0\rho_0} + \dots \tag{4.76}$$

No caso de $\phi_0 < 0$ a fórmula seria idêntica desde que a convenção de sinais naturalmente, estivesse de acordo.

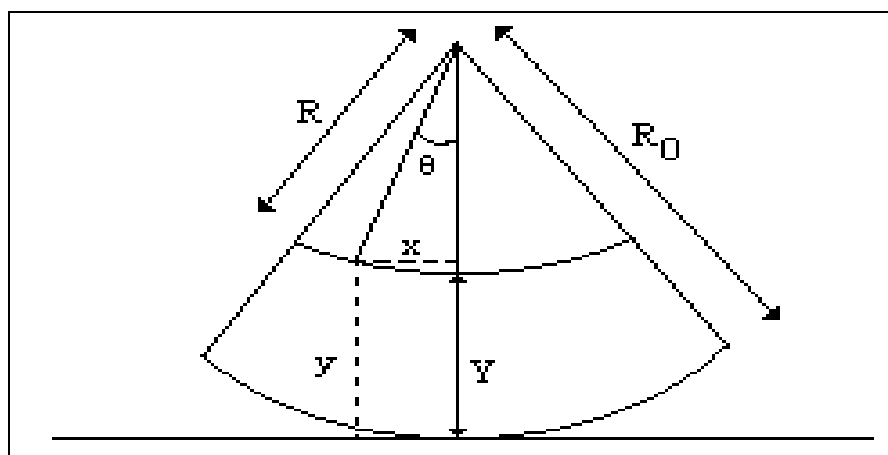


Fig 4.5 – Transformação das coordenadas polares para coordenadas cartesianas (x,y)

Atendendo à figura obtêm-se as fórmulas de transformação em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} x &= (R_0 - Y) \sin \theta \\ y &= R_0 - (R_0 - Y) \cos \theta \\ \theta &= -\sin \phi_0 \cdot \lambda \\ R_0 &= N_0 |\cot \phi_0| \end{aligned} \tag{4.77}$$

Como é $k = dy / d\sigma$ vem:

$$k = 1 + \frac{\sigma^2}{2\rho_0 N_0} + \dots \quad (4.78)$$

Sobre o paralelo central $k_0 = 1$; k cresce rapidamente com o afastamento ao paralelo central o que significa que o sistema é conveniente para zonas alongadas na direcção EW mas estreitas na direcção NS. Visto que $\sigma \approx y$.

$$k = 1 + \frac{y^2}{2\rho_0 N_0} \quad (4.79)$$

A concavidade da transformada de uma geodésica está sempre voltada para o paralelo central. O expediente de reduzir as deformações pela adopção de um factor arbitrário $k_0 < 1$ tem aqui aplicação. Esta projecção recebe o nome de projecção cónica conforme de Lambert, tangente ou secante, conforme se usa ou não o expediente indicado; no primeiro caso há um só paralelo de escala conservada, no segundo há dois. No segundo caso as partes de meridiano y são dadas por

$$y = k_0 \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{6\rho_0 N_0} + \dots \right) \quad (4.80)$$

e k por

$$k = k_0 \left(1 + \frac{y^2}{2N_0 \rho_0} \right) \quad (4.81)$$

4.6.3 Fórmulas de transformação inversa

A determinação das fórmulas inversas, ou seja, o cálculo da latitude e da longitude em função das coordenadas cartográficas, não é uma operação simples nem existe uma expressão directa para a determinação da latitude a partir da coordenadas cartográficas.

A **longitude** é determinada pela inversão directa das equações 4.77.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{R_0 - y} \quad (4.82)$$

$$R = \frac{x}{\sin \theta} \quad (4.83)$$

$$\lambda = \frac{\theta}{\sin \phi_0} \quad (4.84)$$

A **latitude** é determinada por um processo iterativo em 5 passos:

1º - Calcula-se o valor do comprimento de arco meridiano aproximado entre R_0 e R a partir da expressão:

$$\sigma_{ap} = (R_0 - R) / k_0 = Y / k_0 \quad (4.85)$$

2° - Cálculo da primeira aproximação da latitude ϕ_1 :

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{a(1-e^2)k_0} \quad (4.86)$$

Esta expressão obtém-se da inversão da aproximação linear do comprimento de arco meridiano:

$$\sigma_{ap} = a(1-e^2)[A(\phi_1 - \phi_0)] \quad (4.87)$$

3° - Com o valor de ϕ_1 é calculado um novo valor do comprimento do arco meridiano usando a expressão de Rapp (1984, expressão 3.110):

$$\sigma = a(1-e^2) \left\{ A(\phi_1 - \phi_0) - \frac{B}{2}(\text{sen}2\phi_1 - \text{sen}2\phi_0) + \frac{C}{4}(\text{sen}4\phi_1 - \text{sen}4\phi_0) - \frac{D}{6}(\text{sen}6\phi_1 - \text{sen}6\phi_0) + \frac{E}{8}(\text{sen}8\phi_1 - \text{sen}8\phi_0) - \frac{F}{10}(\text{sen}10\phi_1 - \text{sen}10\phi_0) + \dots \right\} \quad (4.88)$$

onde :

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \dots \\ B &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \dots \\ C &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \dots \\ D &= \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \dots \\ E &= \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \dots \\ F &= \frac{693}{131072}e^{10} + \dots \end{aligned} \quad (4.89)$$

4° - Com o novo valor de σ' estamos em condições de determinar a correcção a aplicar à latitude aproximada inicial (ϕ_1) :

$$\Delta\phi = \frac{(\sigma_1 - \sigma')}{\rho_1} \quad (4.90)$$

Em que ρ_1 é raio do meridiano no ponto P_1 e é dado por:

$$\rho_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{3/2}} \quad (4.91)$$

5° - Calcula-se um novo valor para a latitude:

$$\phi_2' = \phi_1 + \Delta\phi \quad (4.92)$$

6° - Volta-se ao passo três e repete-se todo o procedimento até que $\Delta\phi$ seja tão pequeno quanto possível (p.e. 10^{-10})

4.6.4 Correção de redução á corda

Sendo a curvatura geodésica da transformada de uma geodésica dada pelo teorema de Schols, em que dn é dado pela equação 4.52, então:

$$\Gamma = \frac{1}{k} \frac{x_B - x_A}{L} \frac{dk}{dy} = \frac{1}{k} \frac{x_B - x_A}{L} \frac{y}{\rho_0 N_0} \quad (4.95)$$

pois:

$$k = 1 + \frac{y^2}{2\rho_0 N_0} \quad (4.96)$$

fazendo:

$$y = y_A + \frac{1}{3}(y_B - y_A) \frac{2y_A + y_B}{3} \quad (4.97)$$

atendendo a que k é próximo de 1, vem:

$$\Gamma_{1/3} = \frac{1}{3\rho_0 N_0} \frac{(2y_A + y_B)(x_B - x_A)}{L} \quad (4.98)$$

donde finalmente a correção β tangente-corda será:

$$\beta = \frac{1}{2} \Gamma_{1/3} L \quad (4.99)$$

$$\beta'' = \frac{1}{6\rho_0 N_0 \sin 1''} (2y_A + y_B)(x_B - x_A) \quad (4.100)$$

4.6.5 Correção a aplicar a um comprimento finito elipsóidico para se obter o comprimento cartográfico.

Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será:

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \left(1 - \frac{y^2}{2\rho_0 N_0}\right) ds_1 \quad (4.101)$$

$$ds_1 = \frac{dy}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\frac{y_B - y_A}{s_1}} \quad (4.102)$$

$$ds = \frac{s_1}{y_B - y_A} \left(1 - \frac{y^2}{2\rho_0 N_0}\right) dy \quad (4.103)$$

$$s = \frac{s_1}{y_B - y_A} \int_{y_A}^{y_B} \left(1 - \frac{y^2}{2\rho_0 N_0}\right) dy \quad (4.104)$$

$$s = 1 - \frac{1}{2\rho_0 N_0} \frac{s_1}{y_B - y_A} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y_A}^{y_B} \quad (4.105)$$

sendo a correção s_1 -s dada por:

$$s = s_1 - \frac{1}{6\rho_0 N_0} s_1 (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \quad (4.106)$$

4.7 Projecção de Gauss

4.7.1 Fórmulas de transformação directa

A projecção de Gauss ou transversa Mercator é uma projecção conforme que se presta a representar zonas alongadas na direcção NS. Nesta projecção trata-se de assumir que a linha de tangência do cilindro assume uma posição transversa relativamente ao equador, sendo a linha transversa o meridiano central da zona a representar.

Assumindo a condição de conformidade:

$$y + ix = f(\Phi + i\lambda) \quad (4.107)$$

para $\lambda=0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= f(\Phi) \end{aligned} \tag{4.108}$$

O eixo oy representa o meridiano origem das longitudes coincidente com o meridiano central da zona.

Seja $d\sigma$ um elemento do meridiano central em que $d\sigma = \rho d\phi = r d\Phi$. Na carta o elemento $d\sigma$ é representado por:

$$dy = \frac{df}{d\Phi} d\Phi \tag{4.109}$$

Querendo que sobre o meridiano central não haja deformação, então $dy/d\sigma$ deverá ser igual à unidade, ou seja:

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{\frac{df}{d\Phi} d\Phi}{r d\Phi} = \frac{1}{r} \frac{df}{d\Phi} \tag{4.110}$$

como esta equação deverá ser igual à unidade, então:

$$\frac{df}{d\Phi} = r \tag{4.111}$$

e então neste caso a função f é dada por:

$$f(\Phi) = \int_0^{\Phi} r d\Phi = \int_0^{\phi} \rho d\phi \tag{4.112}$$

atendendo à expressão geral das projecções conformes desenvolvendo em série de Mac-Laurin separadamente a parte real e a parte complexa obtém-se:

$$P = f(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \right)_{\lambda=0} + \frac{\lambda^4}{4!} \left(\frac{d^4 f}{d\Phi^4} \right)_{\lambda=0} + \dots \tag{4.113}$$

$$M = \lambda \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!} \left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3} \right)_{\lambda=0} + \frac{\lambda^5}{5!} \left(\frac{d^5 f}{d\Phi^5} \right)_{\lambda=0} + \dots \tag{4.114}$$

As derivadas da função f em ordem a Φ são calculadas a partir da equação (4.112) e têm as seguintes expressões:

$$f(\Phi) = \sigma \quad (4.115)$$

$$\frac{df}{d\Phi} = r = N \cos \phi$$

$$\frac{d^2f}{d\Phi^2} = \frac{dr}{d\Phi} = \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\phi} \frac{d\phi}{d\Phi} = -\sin \phi \rho \frac{r}{\rho} = -N \sin \phi \cos \phi$$

$$\frac{d^3f}{d\Phi^3} = -\frac{dr}{d\Phi} \sin \phi - r \cos \phi \frac{d\phi}{d\Phi} = r \sin^2 \phi - \frac{r^2}{\rho} \cos \phi = N \cos^3 \phi \left[\operatorname{tg}^2 \phi - \frac{N}{\rho} \right] = -N \cos^3 \phi K_1$$

$$\frac{d^4f}{d\Phi^4} = N \sin \phi \cos^3 \phi \left[\frac{N}{\rho} + 4 \frac{N^2}{\rho^2} - \operatorname{tg}^2 \phi \right] = N \sin \phi \cos^3 \phi K_2$$

$$\frac{d^5f}{d\Phi^5} = N \cos^5 \phi \left[\frac{N}{\rho} (14 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi) + 40 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi - 9 \right] = N \cos^5 \phi K_3$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}; \quad r = N \cos \phi; \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

$$K_1 = \frac{N}{\rho} - \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$K_2 = \frac{N}{\rho} + 4 \left(\frac{N}{\rho} \right)^2 - \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$K_3 = 4 \left(\frac{N}{\rho} \right)^3 (1 - 6 \operatorname{tg}^2 \phi) + \left(\frac{N}{\rho} \right)^2 (1 + 8 \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \frac{N}{\rho} \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi$$

$$K_4 = 8 \left(\frac{N}{\rho} \right)^4 (11 - 24 \operatorname{tg}^2 \phi) - 28 \left(\frac{N}{\rho} \right)^3 (1 - 6 \operatorname{tg}^2 \phi) + \left(\frac{N}{\rho} \right)^2 (1 - 32 \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \left(\frac{N}{\rho} \right) \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi$$

$$K_5 = 61 - 479 \operatorname{tg}^2 \phi + 179 \operatorname{tg}^4 \phi - \operatorname{tg}^6 \phi$$

$$K_6 = 1385 - 3111 \operatorname{tg}^2 \phi + 543 \operatorname{tg}^4 \phi + \operatorname{tg}^6 \phi$$

Substituindo nas expressões de M e P obtem-se:

$$P = k_0 \left(\sigma + \frac{\lambda^2}{2} N \sin \phi \cos \phi + \frac{\lambda^4}{24} N \sin \phi \cos^3 \phi K_2 + \frac{\lambda^6}{720} N \sin \phi \cos^5 \phi K_4 + \frac{\lambda^8}{40320} N \sin \phi \cos^7 \phi K_6 \right) \quad (4.116)$$

$$M = k_0 \left(\lambda N \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \phi K_1 + \frac{\lambda^5}{120} N \cos^5 \phi K_3 + \frac{\lambda^7}{5040} N \cos^7 \phi K_5 \right) \quad (4.117)$$

4.7.2 Fórmulas de transformação inversa

As fórmulas de transformação inversa são as seguintes:

$$\begin{aligned} \phi = \phi' - & \left(\frac{t}{k_0 \rho} \right) \left(\frac{M^2}{2k_0 N} \right) + \quad (4.118) \\ & + \left(\frac{t}{k_0 \rho} \right) \left(\frac{M^4}{24k_0^3 N^3} \right) (-4\psi^2 + 9\psi(1-t^2) + 12t^2) - \\ & - \left(\frac{t}{k_0 \rho} \right) \left(\frac{M^6}{720k_0^5 N^5} \right) (8\psi^4(11-24t^2) - 12\psi^3(21-71t^2) + 15\psi^2(15-98t^2 + 15t^4) + \\ & \quad + 180\psi(5t^2 - 3t^4) - 360t^4) \\ & + \left(\frac{t}{k_0 \rho} \right) \left(\frac{M^8}{40320k_0^7 N^7} \right) (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0) \cos \phi' = & \left(\frac{M}{k_0 N} \right) - \left(\frac{M^3}{6k_0^3 N^3} \right) (\psi + 2t^2) + \quad (4.119) \\ & + \left(\frac{M^5}{120k_0^5 N^5} \right) (-4\psi^3(1-6t^2) + \psi^2(9-68t^2) + 72\psi t^2 + 24t^4) - \\ & - \left(\frac{M^7}{5040k_0^7 N^7} \right) (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6) \end{aligned}$$

em que $\psi = \frac{N}{\rho}$ e $t = \text{tg } \phi$.

N , ρ e t são calculados com uma latitude inicial ϕ' e ϕ' é a latitude para a qual o comprimento de arco é igual a P/k_0 . A determinação de ϕ' foi anteriormente apresentada na projecção de Lambert. Neste caso, o passo 1 consiste na atribuição do valor aproximado de $\sigma_{ap} = P/k_0$.

4.7.3 Deformação linear

O comprimento de um elemento infinitesimal, no elipsóide, sobre o paralelo de latitude ϕ é dado por:

$$ds = r d\lambda \quad (4.120)$$

O comprimento da sua representação sobre o plano é dada por:

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2$$

em que

$$dy = r \sin \phi \lambda d\lambda \quad (4.121)$$

$$dx = r d\lambda + \frac{1}{2} r \cos^2 \phi K_2 \lambda^2 d\lambda$$

pelo que o elemento linear é dado por:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \sin^2 \phi \lambda^2 + 1 + \cos^2 \phi \lambda^2 K_2 \quad (4.122)$$

atendendo à expressão de K_2 , obtém-se a expressão do elemento linear:

$$k = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \lambda^2}{\rho N} \quad (4.123)$$

atendendo a que $x \approx r \lambda$, então em coordenadas cartográficas o elemento linear é dado por:

$$k = 1 + \frac{x^2}{2\rho N} \quad (4.124)$$

ou seja, o modulo da deformação linear é unicamente função do quadrado da distância ao meridiano central da projecção. Por isso a projecção de Gauss é adaptada à representação de regiões alongadas na direcção norte-sul.

A correcção tangente-corda nesta projecção é dada por:

$$\beta'' = \frac{1}{6\rho_0 N_0 \text{sen} 1''} (2x_A + x_B)(y_B - y_A) \quad (4.125)$$

e a correcção aos comprimentos finitos é dada por:

$$s = s_1 - \frac{1}{6\rho_0 N_0} s_1 (x_A^2 + x_A x_B + x_B^2) \quad (4.126)$$

Para Portugal continental as últimas três expressões assumem os seguintes valores:

$$k = 1 + 12305 \times 10^{-18} x^2 \quad (4.127)$$

$$\beta'' = 84606 \cdot 10^{-14} (2x_A + x_B)(y_B - y_A) \quad (4.128)$$

$$s = s_1 - 41018 \cdot 10^{-19} (x_A^2 + x_A x_B + x_B^2) \quad (4.129)$$

4.7.4 Convergência de meridianos

A convergência de meridianos é dada por:

$$\text{tg} \gamma = \frac{\partial x / \partial \phi}{\partial y / \partial \phi} \quad (4.130)$$

Assumindo uma aproximação linear nas fórmulas de transformação, obtem-se :

$$\frac{dy}{d\phi} = \rho \quad (4.131)$$

$$\frac{dx}{d\phi} = \lambda \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\phi} = -\lambda \sin \phi \rho \quad (4.132)$$

e, neste caso a convergência de meridianos é dada por:

$$\text{tg} \gamma = -(\lambda - \lambda_0) \sin \phi \quad (4.133)$$

e como γ é um ângulo muito pequeno pode ser calculado como:

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \sin \phi \quad (4.134)$$

Capítulo 5

Sistemas de representação plana utilizados na cartografia portuguesa

5.1 Sistema Puissant – Bonne

Em Portugal, os primeiros cálculos de coordenadas rectangulares da rede geodésica remontam ao segundo quartel do séc. XIX , e executaram-se segundo uma representação plana de Cassini (projecção afilática) com origem no vértice Lisboa (Castelo de São Jorge). No entanto, devido ao facto de Portugal ser uma região alongada na direcção N-S, e estreita na direcção E-W, originou que, em 1850, se adoptasse o Sistema de Projecção de Bonne. As coordenadas já calculadas no sistema de Cassini foram convenientemente convertidas para a projecção de Bonne (projecção equivalente).

A origem da projecção de Bonne coincide com a origem da rede geodésica, ou seja, o vértice Lisboa (situado a SE do Castelo de São Jorge, em Lisboa), o que se designou Datum Lisboa e ao qual se atribuíram as seguintes coordenadas:

$$\phi = 38^{\circ} 42' 56.730''$$

$$\lambda = -9^{\circ} 07' 54.806''$$

$$\alpha = 190^{\circ} 20' 06.44'' \text{ (Azimute do vértice Serves)}$$

Os cálculos foram efectuados sobre o **elipsóide de Puissant**, cujos principais elementos são:

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,858.4 \text{ m} \\ f &= 1/303 \\ e^2 &= 0.006\,589\,7683 \quad (\varepsilon, \eta, N = 0) \end{aligned}$$

Para origem do sistema de coordenadas rectangulares foi também adoptado o referido vértice Observatório do Castelo de São Jorge.

Como se contavam os azimutes a partir do Sul e no sentido horário, o primeiro quadrante do sistema de eixos rectangulares era a SW, ficando portanto a grande maioria do país contida nos 3º e 4º quadrantes.

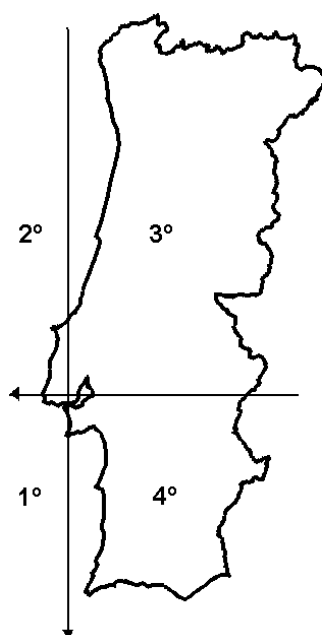


Fig. 5.1 – Localização dos quadrantes no sistema Puissant-Bonne

Estas coordenadas rectangulares comumente designadas por **Coordenadas Puissant-Bonne**, foram utilizadas para a elaboração da primeira carta que cobriu todo o Continente; trata-se da Carta de Portugal em 1:100000, composta por 37 folhas, muito bem desenhadas, gravadas e impressas a uma só cor (preto) e que demorou cerca de 50 anos (1853 a 1904) a ser elaborada.

Como se sabe, a projecção de Bonne tem, para regiões alongadas na direcção N-S e estreitas na direcção E-W (como é o caso Português) deformações angulares pequenas, ou seja, é quase conforme; inclusivé ela é mesmo rigorosamente conforme sobre o meridiano central e sobre o paralelo central. No entanto, devido à grande excentricidade da origem da projecção cartográfica, o Sistema Puissant-Bonne oferecia sobre o território continental importantes deformações angulares e lineares.

5.2 Sistema Bessel – Bonne

No último quartel do séc. XIX as coordenadas geográficas da Rede Geodésica foram novamente calculadas a partir de um novo “datum”, adoptado para a nova origem: o vértice do Castelo de São Jorge, agora com novas coordenadas:

$$\phi = 38^{\circ} 42' 43.631''$$

$$\lambda = -9^{\circ} 07' 54.806''$$

$$\alpha = 190^{\circ} 19' 40''.371 \text{ (Azimute do vértice Servés)}$$

O valor da longitude foi posteriormente corrigido para $\lambda = -9^{\circ} 07' 54.862''$. Passou-se a usar um novo **elipsóide**, o de **Bessel**, cujos elementos são:

$$a = 6377397 \text{ m}$$

$$b = 6356078.963 \text{ m}$$

$$f = 1 / 299.1528$$

$$e^2 = 0.006\ 674\ 372\ 3$$

Para minorar e distribuir o melhor possível por todo o interior do país as deformações inerentes a qualquer sistema de projecção cartográfico, escolheu-se uma nova origem para a projecção e para o sistema de eixos rectangulares. Essa origem, devido à sua localização no centro do território continental, recebeu o nome de **Ponto Central**. Este ponto não se encontra materializado no terreno, mas é definido pelo cruzamento do paralelo de latitude $\phi = 39^{\circ} 40' \text{ N}$ com o meridiano de $1^{\circ} 00' 00''.00$ a Este do vértice Castelo de São Jorge. Assim, o referido Ponto Central localiza-se a cerca de 2936 m do vértice geodésico de primeira ordem “Melriça”, no azimute $4^{\circ} 31'$. Resulta então que as suas coordenadas geográficas do Ponto Central são:

$$\phi = 39^{\circ} 40'$$

$$\lambda = -8^{\circ} 07' 54.862''$$

Apesar do “datum” planimétrico ter sido de novo determinado no Castelo de São Jorge, como o tinha sido no Sistema Puissant–Bonne, pelo facto de se ter partido de novas coordenadas astronómicas e de um outro elipsóide, resultaram coordenadas rectangulares distintas, tanto mais que a origem do sistema de projecção passou a ser o Ponto Central.

Para o estabelecimento do sistema de eixos rectangulares, efectuou-se uma translação do Castelo de São Jorge para o Ponto Central e uma rotação, no sentido retrógrado, de valor igual ao da convergência de meridianos nesse ponto, tendo-se conservado a sequência dos quadrantes relativa ao Sistema Puissant–Bonne.

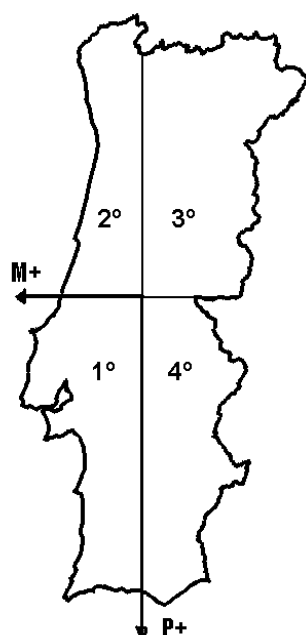


Fig 5.2 – Localização dos quadrantes no Sistema Bessel – Bonne.

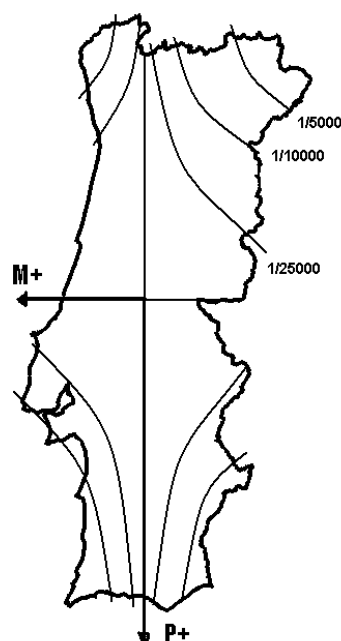


Fig 5.3 – Deformações do Sistema Bessel – Bonne.

Dada a nova origem da projecção cartográfica, obtiveram-se agora menores deformações lineares e angulares. Desta situação resultou que as deformações lineares e angulares a temer em todo o território continental são desprezáveis nas aplicações práticas, e, em alguns aspectos inferiores à que oferece o Sistema Conforme de Gauss, que com a mesma origem se passou a utilizar no segundo quartel do séc. XX.

As coordenadas rectangulares assim produzidas são comumente designadas por **Coordenadas Bessel–Bonne** e informaram a Carta Corográfica de Portugal na escala 1:50000, elaborada pelo I.P.C.C. em 175 folhas, previamente impressas a preto e substituídas por sucessivas edições e actualizações a 5 cores. No mesmo sistema de projecção se baseia ainda hoje a Carta Corográfica de Portugal na escala 1:100000, a cores, em 57 folhas, múltiplas das folhas 1:50000.

5.3 Sistema Hayford–Gauss / Datum Lisboa

Os imperativos de maior precisão reclamada pelos levantamentos em grande escala impuseram em Portugal, bem como nos outros países da Europa, o estabelecimento de uma

nova rede geodésica sobre o território continental em moldes muito mais apurados que os utilizados no séc. XIX .

Depois de 1924, ano da realização em Madrid dum Congresso da União Geodésica e Geofísica Internacional, foi acordada a adopção de um novo “datum” planimétrico para a rede geodésica com base no **elipsóide Internacional de Hayford**, de parâmetros:

$$\begin{aligned}a &= 6378388 \text{ m} \\f &= 1 / 297 \\e^2 &= 0.006\,722\,670\,022\,33\end{aligned}$$

O elipsóide referido foi posicionado, igualmente, no Castelo de São Jorge, e para o qual se manteve a latitude, mas se determinou mais correctamente a longitude (já anteriormente adoptado na projecção Bonne):

$$\begin{aligned}\phi &= 38^\circ 42' 43.631'' \\ \lambda &= -9^\circ 07' 54.862'' \\ \alpha &= 190^\circ 19' 40.37'' \text{ (Azimute do vértice Serves)}\end{aligned}$$

No entanto as operações de observação e cálculo da rede geodésica, só a partir de 1940 se passaram a fazer de maneira contínua e sistemática. Tomou-se de novo para origem dos eixos rectangulares um **Ponto Central** com a mesma definição da indicada no Sistema Bessel–Bonne, mas passou-se a usar a **Projecção Conforme Transversa de Mercator**, vulgarmente conhecida por **Projecção de Gauss**, donde a designação para estas **Coordenadas de Hayford–Gauss**.

O facto do nosso país se desenvolver segundo os meridianos e estar compreendido numa faixa de menos de 3° de amplitude, resulta que ele pertence à classe de regiões a que se deve aplicar a representação de Gauss. De referir que, atendendo a que o Ponto Central tinha sido definido a partir das coordenadas geográficas do Castelo de São Jorge, a alteração destas levou à alteração das do **Ponto Central**, as quais ficaram com os valores:

$$\begin{aligned}\phi &= 39^\circ 40' \text{ N} \\ \lambda &= 8^\circ 07' 54''.862 \text{ W}\end{aligned}$$

Quanto aos ângulos, começou-se a trabalhar com rumos (contados a partir da direcção Norte) em vez de azimutes (contados a partir do Sul), passando os quadrantes a serem contados a partir do NE no sentido horário. Neste novo sistema de eixos, mantêm-se as fórmulas e as convenções estudadas para os quadrantes trigonométricos, o que simplifica o trabalho e evita confusões.

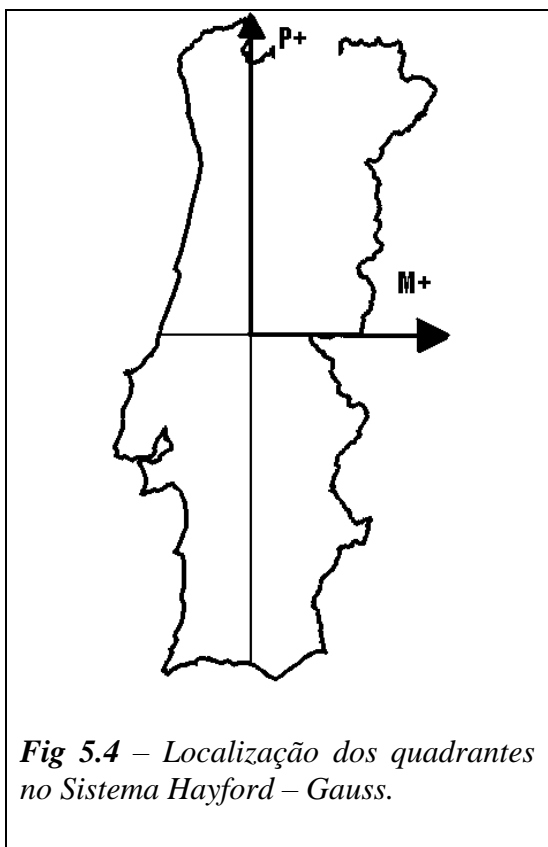


Fig 5.4 – Localização dos quadrantes no Sistema Hayford – Gauss.

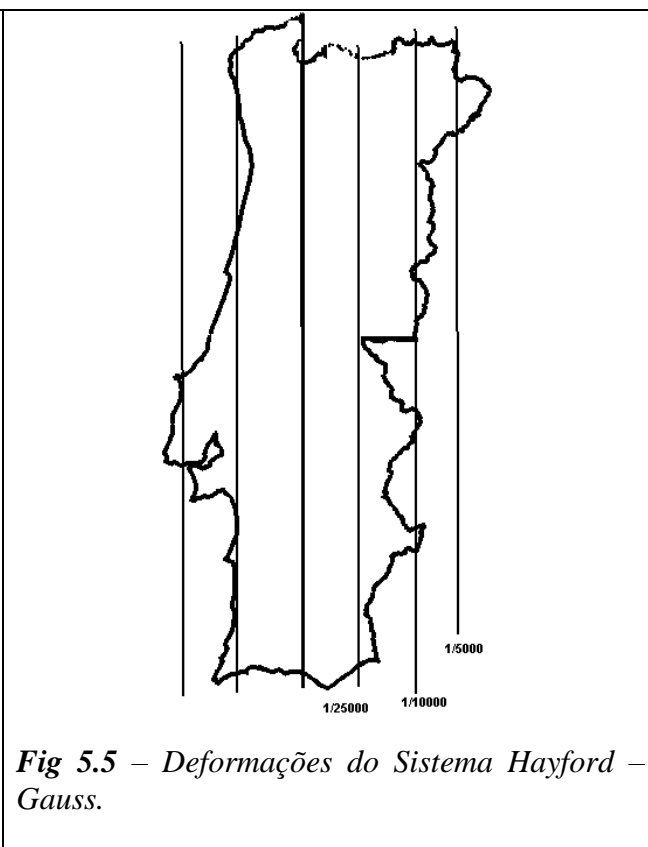


Fig 5.5 – Deformações do Sistema Hayford – Gauss.

Neste sistema de projecção não se introduziu o artifício da redução de escala no meridiano central porque as deformações lineares a temer no país não o justificavam.

Estas coordenadas Hayford–Gauss são hoje as mais utilizadas nos trabalhos topográficos em todo o país, designadamente nos levantamentos cadastrais às escalas 1:2000 e 1:5000, bem como na feitura das cartas 1:10000, 1:200000, 1:400000 e 1:500 000 do I.P.C.C.

5.4 Sistema Hayford–Gauss militar

A Carta Militar de Portugal, na escala 1:25000, cuja elaboração está a cargo do Instituto Geográfico do Exército, utiliza o mesmo Sistema de Coordenadas Hayford–Gauss descrito anteriormente.

No entanto, com a finalidade de situar todo o país num único quadrante e trabalhar apenas com coordenadas positivas, recorreu-se a um artifício de translacionar o sistema de eixos, que passa pelo Ponto Central, de 200 km segundo a perpendicular no sentido W e de 300 km segundo a meridiana no sentido Sul. Ao ponto de intersecção da nova meridiana com a nova perpendicular dá-se o nome de **Ponto Fictício**. O Ponto Fictício (origem das

coordenadas rectangulares) situa-se a SW do Cabo de São Vicente. Assim o país ficou inscrito num rectângulo cujos lados são de 600 km segundo a meridiana e de 400 km segundo a perpendicular .

Todavia, este novo sistema de eixos não obedece à condição de a meridiana ter de coincidir com a direcção do meridiano geográfico relativo à origem das coordenadas rectangulares. Desta forma resultou que a quadrícula da carta continuou a ser exactamente a mesma, e que tanto a convergência de meridianos como as deformações provenientes do sistema de projecção se mantiveram inalteráveis para todos os pontos das cartas.



Fig. 5.6 – Origem das coordenadas militares portuguesas

A relação entre as coordenadas Hayford-Gauss e as relativas ao Ponto Fictício (vulgo chamadas Coordenadas Militares) é a seguinte:

$$\mathbf{MM} = \mathbf{MHG} + \mathbf{200\ km}$$

$$\mathbf{PM} = \mathbf{PHG} + \mathbf{300\ km}$$

5.5 Sistema de coordenadas U.T.M.

São universalmente conhecidas as vantagens resultantes da adopção duma cartografia mundial única e uniforme. No entanto, a resolução completa desta cartografia única, implica a coordenação dos três factores seguintes, de certo modo independentes entre si:

- Adopção de um elipsóide internacional, que melhor se adapte às necessidades de todos os países;

- Escolha dum ponto fundamental ou “Datum”, comum para todas as triangulações;
- Escolha dum sistema comum de representação plana conforme.

Assim, de 1946 a 1950, procedeu-se à compensação do conjunto de redes geodésicas europeias, do qual resultou que todas as redes europeias foram reduzidas a um sistema único, baseado no Elipsóide Internacional, com o “Datum” em Potsdam (Alemanha), ficando as coordenadas rectangulares designadas por **U.T.M. – ED 1950** (Universal Transverse Mercator – European Datum 1950).

Do exposto resultou que, as cartas 1 : 50 000, 1 : 100 000, 1 : 200 000 e 1 : 500 000 do I.P.C.C. apresentem, em sobre-carga, as coordenadas U.T.M. dos cantos da folha, ou referências da quadrícula U.T.M. conjugadas com os resultados do ajustamento efectuado. Relativamente às cartas militares, a quadrícula U.T.M. passou, a partir de 1965, a figurar como quadrícula principal nas cartas 1 : 25 000, 1 : 50 000 e 1 : 250 000 (pese embora a projecção adoptada seja a de Gauss).

O sistema U.T.M. (Universal Transverse Mercator) é um sistema de representação que abrange toda a Terra, com excepção das zonas polares. Estas zonas estão mais convenientemente representadas através de uma projecção estereográfica, que integra o chamado sistema U.P.S. (Universal Polar Stereographic).

No sistema U.T.M. a superfície da Terra compreendida entre os paralelos 84° N e 80° S é dividida por uma série de meridianos, regularmente intervalados de 6° em 6°. Este valor de amplitude em longitude foi calculada por forma a serem desprezadas as deformações provenientes do sistema de projecção (para evitar lacunas, entre cada dois fusos vizinhos, há uma faixa de sobreposição de 30'). Portanto, para cada fuso, utiliza-se um cilindro secante para que se reduzam as deformações; nas linhas de secância não existem deformações. Constituem-se assim 60 fusos, cada um deles identificados por um número, de 1 a 60, a partir do anti-meridiano de Greenwich (longitude 180°) e crescendo para Leste.

A partir do paralelo 80° S, considera-se ainda uma série de paralelos regularmente intervalados de 8° em 8° (excepto o último compreendido entre a latitude 72° N e 84° N, cujo intervalo é de 12°). Constituí-se assim uma série de 20 linhas de zonas, cada uma delas identificada por uma letra, desde C a X, com excepção do I e do O, a partir do Sul (as letras A,B,Y e Z foram reservadas para os calotes polares representados no sistema U.P.S.).

Entre os paralelos, de latitude, 84° N e 80° S fica assim constituída uma rede geográfica de meridianos e paralelos definindo $60 \times 20 = 1200$ zonas, cada uma delas com 6° de amplitude e 8° em latitude (excepto a linha de zonas compreendida entre os paralelos 72° N e 84° N que tem 6° por 12°).

Cada fuso possui os seus eixos de referência próprios, que são constituídos pelo meridiano central do fuso, ao qual se atribuiu, por convenção, uma distância fictícia à meridiana de 500 000 metros, a fim de evitar coordenadas negativas para os pontos situados a oeste do

meridiano central; e pelo equador, ao qual se atribuiu, por razões semelhantes, uma distância fictícia à perpendicular de 0 ou 10 000 000 metros, conforme se referir às zonas situadas nos hemisférios Norte ou Sul.

Com tais convenções, todos os pontos dum dado fuso situado a leste do seu meridiano central terão uma distância à meridiana superior a 500 000 metros. Analogamente, se uma zona está situada no hemisfério Norte, a distância fictícia à perpendicular de qualquer dos seus pontos é superior a 0 metros, enquanto se estiver no hemisfério Sul é inferior a 10 000 000 metros.

Este sistema completa-se através da criação de uma malha de quadrados em que as linhas N-S são todas paralelas à meridiana respectiva, isto é, ao meridiano central do fuso, e cujas linhas E-O são perpendiculares às primeiras. Esta malha marca-se a partir do equador e do meridiano central de cada fuso e constitui a quadrícula militar de referência U.T.M., sendo o intervalo entre as linhas sucessivas, escolhido consoante a escala da carta. Por exemplo, para escalas de 1 : 100 000, adopta-se uma malha quilométrica.

O território nacional continental fica situado na zona 29, meridiano central 9°.

Para este sistema de projecção e para o meridiano central do fuso, o valor do coeficiente de deformação dos comprimentos k é:

$$K = 0.9996 = 1 - 4 / 10\,000$$

Portanto, um comprimento traçado sobre o elipsóide ao longo do meridiano central do fuso sofrerá uma redução de 0.4 m / km, ao passar para o plano.

Qualquer comprimento traçado no elipsóide nas imediações de pontos cuja abcissa obedeça à condição “320 km < M < 680 km”, sofrerá ainda uma redução na sua passagem para o plano, embora tal redução seja menor que 0.4 m / km. Quando M=320 km ou M=680 km, o coeficiente de deformação dos comprimentos traçados sobre o elipsóide e sobre o plano serão iguais.

Daí por diante, até aos limites do fuso com 3° de amplitude para um e outro lado do meridiano central do fuso, ou seja, para “170 km < M < 320 km e 680 km < M < 830 km” verifica-se o inverso, isto é, o coeficiente de deformação torna-se cada vez maior que a unidade. Em consequência, os comprimentos traçados sobre o elipsóide sofrerão uma dilatação crescente ao passarem para o plano, embora essa dilatação nunca exceda os 0,9 m / km, o que corresponde a um valor de $k=1,0009$. Ou seja, pode-se afirmar que o exagero da escala cresce quando nos afastamos do meridiano de tangência.

No território continental, as deformações são muito superiores ao Sistema Hayford-Gauss e ao Sistema Bessel-Bonne e por isso não se utiliza na cartografia nacional.

5.6 Sistema de coordenadas no Arquipélago dos Açores e da Madeira e carta do território nacional

As coordenadas rectangulares das Regiões Autónomas dos Açores e da Madeira são todas U.T.M., pois estas são-lhes muito favoráveis no que diz respeito às deformações lineares.

As coordenadas geográficas destas ilhas resultam de “data” locais que abrangem duas ou mais ilhas. Assim, no Arquipélago dos Açores, temos que:

- Ilhas das Flores e Corvo (Grupo Ocidental) – datum Observatório de Sta. Cruz das Flores;
- Ilhas da Terceira, Graciosa, S. Jorge, Pico e Faial (Grupo Central) – datum Base SW na ilha Graciosa;
- Ilhas de S. Miguel e Sta. Maria (Grupo Oriental) – datum São Braz – pilar geodésico.

Para o Arquipélago da Madeira – datum Estação Astronómica na Ilha de Porto Santo.

Em 1965, por observações de satélites e, nos Açores por observação de fochos luminosos lançados de avião, operou-se à ligação entre os grupos das ilhas açoreanas e dos arquipélagos à Rede Geodésica Unificada Europeia 1950.

Uma conferência internacional expressamente reunida em Paris em 1913, estabeleceu as bases técnicas uniformes para a realização de uma Carta Internacional do Mundo na escala 1 / M (1 : 1 000 000) destinada a estudos de conjunto. Ao I.P.C.C. competiu a edição e conservação de 3 folhas que abrangem:

- a metade sul de Portugal e parte SW de Espanha (a folha a norte compete ao I.G.C. de Espanha);
- o Arquipélago da Madeira;
- o Arquipélago dos Açores.

A projecção actualmente utilizada é a cónica conforme secante de Lambert.

Foi também elaborada, em 1972, pelo I.P.C.C. uma carta 1 / 2,5 M (1:2500000) cobrindo simultaneamente Portugal Continental e Regiões Autónomas. O sistema de projecção adoptado foi o mesmo que para a carta 1 / M, sendo paralelos de escala conservada os correspondentes às latitudes de 32° e 40°.

Data: os das Ilhas e ED50

Elipsóide : Hayford ; a = 6 378 388 m, f = 1 / 297

Projecção Cartográfica : Cónica conforme de Lambert ; 2 paralelos de escala conservada

Paralelos conservados: 40° 40' e 43° 20' N ; $\lambda_c = 9^\circ$ W Portugal Norte
36° 40' e 39° 20' N ; $\lambda_c = 9^\circ$ W Portugal Sul
32° 40' e 35° 20' N ; $\lambda_c = 15^\circ$ W Madeira
36° 40' e 39° 20' N ; $\lambda_c = 28^\circ$ W Açores
32° 00' e 40° 00' N ; $\lambda_c = 18^\circ 30'$ W Portugal Continental e Ilhas

Aplicação: - Carta Internacional do Mundo: 1 / 1 000 000
- Carta de Portugal Continental, Açores e Madeira: 1 / 2 500 000

Orientação dos eixos: as cartas só possuem seccionamento geográfico

5.7 Sistema Hayford–Gauss / Datum 73

Embora estas coordenadas estejam só a ser utilizadas em ortofotos e plantas cadastrais, elas são muito requeridas para cartografia de grande escala e outras aplicações.

Com o recurso do cálculo automático fez-se em 1973 a compensação da rede geodésica primordial de Portugal Continental, fixando as coordenadas astronómicas de Melriça como coordenadas geodésicas (desvio da vertical nulo em Melriça).

O Ponto Central, origem das coordenadas rectangulares de Gauss é definido como já foi referido, como o cruzamento do paralelo 39° 40' N com o meridiano 1° 00' E do Castelo de São Jorge. Esta definição vale para os dois Sistemas: HGDLx e HGD73. Como tal, o Ponto Central da projecção ficou definido como tendo as coordenadas geodésicas (datum 73):

$$\phi = 39^\circ 40' \text{ N e } \lambda = -8^\circ 07' 54''.862$$

Mas, as coordenadas rectangulares HGDLx e HGD73 de um qualquer ponto genérico só poderiam ser rigorosamente iguais se esse ponto tivesse coordenadas geográficas iguais em DLx e D73, o que é impossível.

Veja-se que, as coordenadas estabelecidas astronomicamente para cada uma das origens diferem das coordenadas geodésicas de cada uma delas no outro Datum. Isto é:

Castelo de S. Jorge:

$$\begin{aligned} \phi &= 38^\circ 42' 43''.6310 & ; & \quad \lambda = -9^\circ 07' 54''.862 & \rightarrow & \text{Astronómicas e DLx} \\ \phi &= 38^\circ 42' 46''.4533 & ; & \quad \lambda = -9^\circ 08' 02''.430 & \rightarrow & \text{D73} \end{aligned}$$

Melriça:

$$\phi = 39^\circ 41' 37''.3000 & ; & \quad \lambda = -8^\circ 07' 53''.310 & \rightarrow & \text{Astronómicas e D73}$$

$$\phi = 39^{\circ} 41' 34''.4302 \quad ; \quad \lambda = -8^{\circ} 07' 45''.760 \quad \rightarrow \quad DLx$$

O que acontece então? Veja-se a figura 5.7:

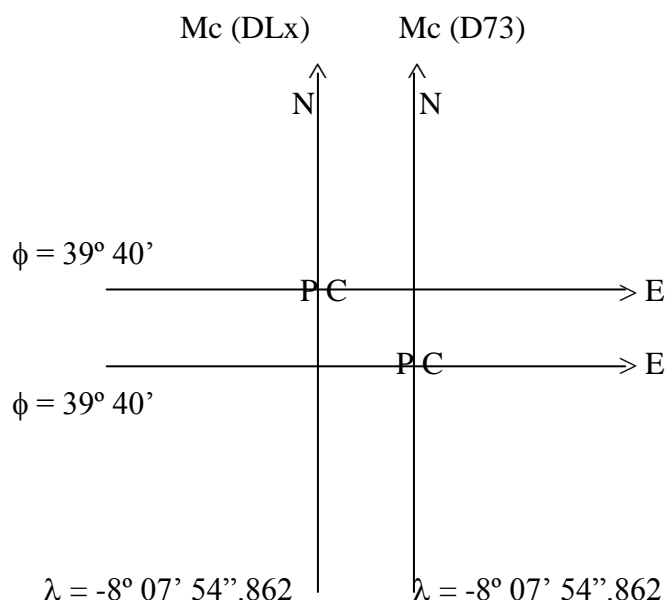


Fig. 5.7 – Relação das coordenadas do sistema Hayford Gauss datum Lisboa e o sistema Hayford Gauss D73

Apesar de terem as mesmas coordenadas geográficas, os dois P.C. não se encontram no mesmo local físico. Isto deve-se ao facto de as coordenadas geográficas terem sofrido um deslocamento de cerca de 8'' em longitude e 3'' em latitude. Resulta então que as coordenadas rectangulares Gauss se encontram desfasadas nos dois "Data" aproximadamente à distância entre os dois P.C.

Para evitar incómodos ao utilizador, a origem das coordenadas rectangulares no D73 não é o seu P.C., mas sim um ponto deslocado 180.598 metros W, 86.990 metros N, i.e., perto do P.C. Lx, ou seja:

$$\begin{aligned} M_{D73} &= M + 180.598\text{m} \\ P_{D73} &= P - 86.990\text{m} \end{aligned}$$

Sendo assim, um ponto no terreno terá coordenadas rectangulares HGDLx e HGD73 muito próximas uma das outras.

5.8 Sistema PT-TM06 (Hayford–Gauss / ETRS89)

Este sistema de referência geodésico/cartográfico foi adoptado pelo Instituto Geográfico Português em 2006 e resulta da adopção do sistema de referência geodésico ETRS89 como sistema de referência geodésico nacional.

O ETRS89 é um sistema global de referência recomendado pela EUREF (European Reference Frame, subcomissão da IAG - Associação Internacional de Geodesia) estabelecido através de técnicas espaciais de observação. No simpósio da EUREF realizado em Itália em 1990 foi adoptada a seguinte resolução: "A Sub-comissão da IAG para o Referencial Geodésico Europeu (EUREF) recomenda que o sistema a ser adoptado pela EUREF seja coincidente com o ITRS na época de 1989.0 e fixado à parte estável da Placa Euro-Asiática, sendo designado por Sistema de Referência Terrestre Europeu 1989 (European Terrestrial Reference System – ETRS89)".

O estabelecimento do ETRS89 em Portugal Continental foi efectuado com base em campanhas internacionais (realizadas em 1989, 1995 e 1997), que tiveram como objectivo ligar convenientemente a rede portuguesa à rede europeia. Nos anos subsequentes, toda a Rede Geodésica de 1ª ordem do Continente foi observada com GPS, tendo o seu ajustamento sido realizado fixando as coordenadas dos pontos estacionados nas anteriores campanhas internacionais.

A agência EuroGeographics recomenda a utilização das seguintes projecções cartográficas: Transversa de Mercator, para escalas superiores a 1/500 000; cónica conforme de Lambert, com dois paralelos de escala conservada, para escalas inferiores a 1/500 000

Em Portugal foi adoptado o sistema ETRS89 com a projecção Transversa de Mercator com os seguintes parâmetros:

Projecção cartográfica:	Transversa de Mercator
Latitude da origem das coordenadas rectangulares:	39° 40' 05'',73 N
Longitude da origem das coordenadas rectangulares:	08° 07' 59'',19 W
Falsa origem das coordenadas rectangulares:	Em M (distância à Meridiana): 0 m Em P (distância à Perpendicular): 0 m
Coefficiente de redução de escala no meridiano central:	1,0

Bibliografia

Afonso, S. (1972). *Cartografia Matemática*. Cadernos Técnicos de Informação do IGC.

Goussinsky, B. (1951). *On the Classification of map projections*. Empire Survey Review.

Maling, D.H. (1965). The terminology of map projections, International Yearbook of Cartography VIII.

Richardus, P. and Adler, R. (1974). *Map Projections*. North-Holland Publishing Company.

ANEXO I – Parâmetros de elipsóides

Elipsóide	a	1/f	e ²
Bessel (1841)	6377397.0	299.1528	0.006674373
Internacional (1924)	6378388.0	297.0	0.00672267
GRS80	6378137.	298.257222101	0.00669438002290

a - semi-eixo maior
b – semi-eixo menor
f – achatamento
e – excentricidade

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$f = \frac{a - b}{a}$$

ANEXO II - Sistemas de Representação Plana usados em Portugal**Sistema Hayford Gaus/ Datum Lisboa – HGDLx**

Sistema de Referencia geodésico	Datum Lisboa / datum altimétrico de Cascais
Elipsóide de Referência	Hayford
Sistema de Coordenadas Cartográficas	Rectangulares com Projecção de Gauss
Origem das coordenadas	Latitude= 39° 40' Longitude= -8° 7' 54.862''
Falsa Origem	$\Delta M = 0.0$ $\Delta P = 0.0$
Factor de escala	$K = 1.0$

Sistema Hayford Gaus/ Datum 73 – HG73

Sistema de Referencia geodésico	Datum Lisboa / datum altimétrico de Cascais
Elipsóide de Referência	Hayford
Sistema de Coordenadas Cartográficas	Rectangulares com Projecção de Gauss
Origem das coordenadas	Latitude= 39° 40' Longitude= -8° 7' 54.862''
Falsa Origem	$\Delta M = 180.598$ $\Delta P = -86.990$
Factor de escala	$K = 1.0$

Sistema PTTM06/ETRS80

Sistema de Referencia geodésico	ETRS89 / datum altimétrico de Cascais
Elipsóide de Referência	GRS80
Sistema de Coordenadas Cartográficas	Rectangulares com Projecção de Gauss
Origem das coordenadas	Latitude= 39° 40' 05'',73 N Longitude= 08° 07' 59'',19 W
Falsa Origem	$\Delta M = 0.0$ $\Delta P = 0.0$
Factor de escala	$K = 1.0$

Quadricula UTM – Usada nos Açores e Madeira (EPSG-2942)

Sistema de Referencia geodésico	indiferente
Elipsóide de Referência	indiferente
Sistema de Coordenadas Cartográficas	Rectangulares com Projecção de Gauss
Origem das coordenadas	Latitude= 0.0 Longitude= dependente do fuso
Falsa Origem	$\Delta M = 500000.0$ $\Delta P = 0.0$
Factor de escala	$K = 0.9996$

Consultar:

EPSG Geodetic Parameter Dataset (European Petroleum survey Group)

<http://www.epsg.org/Geodetic.html>